## Топология, 2-й курс. Листок 5. Гомотопически простые пространства. $H$-пространства. 5 октября 2011

**1.** Пусть $X$ — $CW$-комплекс, $X^n$ — его $n$-мерный остов. Докажите, что вложение $i : X^n \to X$ индуцирует изоморфизм $i_* : \pi_k(X^n, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Если каждый элемент группы $\pi_1(X, x_0)$ индуцирует тождественный автоморфизм группы $\pi_n(X, x_0)$, то пространство $X$ называют *гомотопически $n$-простым*.

**2.** Докажите, что пространство гомотопически 1-просто тогда и только тогда, когда его фундаментальная группа коммутативна.

При решении задач 3 и 4 можно считать известным, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

**3.** Докажите, что при $n \geq 2$ группа $\pi_n(S^n \vee S^1, x_0)$ является свободной абелевой группой с бесконечным (счётным) набором образующих.

**4.** Докажите, что пространство $S^n \vee S^1$ не является гомотопически $n$-простым.

Топологическое пространство $X$ с отмеченной точкой $x_0 \in X$ называют *$H$-пространством*, если задано непрерывное отображение $\mu : X \times X \to X$, для которого отображения $x \mapsto \mu(x, x_0)$ и $x \mapsto \mu(x_0, x)$ гомотопны тождественному отображению (предполагается, что $\mu(x_0, x_0) = x_0$). Отображение $\mu$ называют при этом *умножением*.

**5.** Докажите, что пространства $\mathbb{C}P^\infty$ и $\mathbb{R}P^\infty$ являются $H$-пространствами.

**6.** Докажите, что любое пространство петель является $H$-пространством.

**7.** Докажите, что сфера $S^7$ является $H$-пространством.

**8.** Докажите, что если $X$ — $H$-пространство с отмеченной точкой $x_0$, то группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

**9.** Докажите, что любое $H$-пространство $X$ гомотопически просто (т.е. гомотопически $n$-просто для любого натурального $n$).