Топология, 2-й курс. Листок 6. Многообразия. Ориентируемость. 12 октября 2011

1. Докажите, что на следующих топологических пространствах можно ввести структуру гладкого многообразия: а) S^n; б) $\mathbb{R}P^n$; в) $\mathbb{C}P^n$; г) T^n (n-мерный тор).

2. Докажите, что структуру гладкого многообразия можно ввести на пространстве $G_{k,n}$ k-мерных подпространств в n-мерном пространстве и на пространстве $G^+_{k,n}$ ориентированных k-мерных подпространств в n-мерном пространстве.

3. Пусть $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ — однородные координаты на $\mathbb{R}P^n$. Как связаны координаты одного и того же векторного поля в карте x_1/x_0, x_2/x_0, $\ldots$, x_n/x_0 и в карте x_0/x_1, x_2/x_1, $\ldots$, x_n/x_1?

4. Докажите, что $G_{k,n} \approx G_{n-k,n}$.

5. Докажите, что многообразие TS^n касательных векторов к сфере гомеоморфно подмножеству в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, заданному уравнением $z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1$.

6. Докажите, что $G^+_{2,4} \approx S^2 \times S^2$.

7. Докажите, что квадрика в $\mathbb{C}P^{n-1}$, заданная уравнением $z_1^2+\cdots+z_n^2 = 0$, диффеоморфна $G^+_{2,n}$. Более того, при этом диффеоморфизме комплексное сопряжение соответствует изменению ориентации плоскости.

8. Докажите, что любое односвязное многообразие ориентируемо.

9. Докажите, что любое неориентируемое многообразие можно двулистно накрыть ориентируемым многообразием.

10. Ориентируемы ли следующие многообразия: а) $\mathbb{R}P^n$; б) $\mathbb{C}P^n$?

11. Докажите, что многообразие $G^+_{k,n}$ всегда ориентируемо.

12. Докажите, что вещественное многообразие Грассмана $G_{k,n}$ ориентируемо тогда и только тогда, когда n чётно. (Одно из возможных доказательств состоит в том, чтобы рассмотреть транзитивное действие группы $\mathrm{SO}(n)$ на $G_{k,n}$ со стационарной подгруппой $(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \cap \mathrm{SO}(n)$ и попытаться разнести ориентацию с помощью этого действия).