Топология, 2-й курс. Листок 9. Векторные поля. Конструкция Понтрягина. 2 ноября 2011

1. Дана триангуляция замкнутого многообразия M^n. Постройте на M^n векторное поле так, чтобы каждому k-мерному симплексу триангуляции соответствовала бы особая точка индекса $(-1)^k$ (симплексы и особые точки должны находиться во взаимно однозначном соответствии.)

2. Докажите, что если M^n — замкнутое многообразие с нулевой эйлеровой характеристикой, то на M^n существует векторное поле без особых точек.

3. Докажите, что сумма индексов особых точек векторного поля на замкнутом многообразии нечётной размерности равна нулю.

4. Докажите, что если на замкнутом многообразии существует поле направлений (т.е. в каждой точке задана прямая из касательного пространства), то на нём существует и векторное поле без особых точек.

Гладкое замкнутое подмногообразие (не обязательно связное) $M^k \subset \mathbb{R}^{n+k}$ называют *оснащённым*, если в каждой точке $x \in M^k$ задан ортонормированный набор векторов $v_1(x), \ldots, v_n(x)$, ортогональных T_xM^k; при этом каждый вектор $v_i(x)$ гладко зависит от x. Пустое множество мы считаем оснащённым многообразием любой размерности k.

Два оснащённых многообразия M_0^k и M_1^k называют *оснащённо кобордантными*, если в $\mathbb{R}^{n+k+1}$ существует подмногообразие W^{k+1}, обладающее следующими свойствами:

- W^{k+1} расположено в полосе $0 \leq x_{n+k+1} \leq 1$;
- край W^{k+1} состоит из M_0^k и M_1^k, причём эти многообразия расположены, соответственно, на гиперплоскостях $x_{n+k+1} = 0$ и $x_{n+k+1} = 1$;
- W^{k+1} подходит к этим гиперплоскостям ортогонально;
- на W^{k+1} задано гладкое семейство ортонормированных наборов векторов, продолжающее те семейства, которые заданы на M_0^k и M_1^k.

Множество классов оснащённо кобордантных многообразий размерности k в $\mathbb{R}^{n+k}$ обозначают $\Omega_{\mathrm{fr}}^k(n+k)$.

5. Задайте на множестве $\Omega_{\mathrm{fr}}^k(n+k)$ структуру абелевой группы (несвязное объединение).

6. а) Докажите, что $\Omega_{\mathrm{fr}}^0(n) \cong \pi_n(S^n)$ при $n \geq 1$ (Хопф).
б) Докажите, что $\Omega_{\mathrm{fr}}^k(n+k) \cong \pi_{n+k}(S^n)$ при $k \geq 0$ и $n \geq 1$ (Понтрягин).

7. Опишите оснащённое многообразие в $\Omega_{\mathrm{fr}}^1(3)$, соответствующее расслоению Хопфа $p : S^3 \to S^2$.