Алгебраические группы.

Ярослав Абрамов

Contents

I. Группы и алгебры Ли.

A. Основные определения

Определение 1. Группа Ли — это гладкое многообразие G с выделенной точкой $1 \in G$, снабжённое двумя гладкими отображениями $m\colon G \times G \to G$, $i\colon G \to G$ (умножение и взятие обратного элемента), удовлетворяющих следующим условиям:

1. *Ассоциативность:* $m(m(a,b),c) = m(a,m(b,c))$ для всех $a,b,c \in G$;

2. *Существование единицы:* $m(1,a) = m(a,1) = a$ *для всех* $a \in G$*;*

3. *Обратимость умножения:* $m(a,i(a)) = m(i(a),a) = 1$ *для всех* $a \in G$*.*

Обычно используются стандартные обозначения: $m(a,b) = ab = a \cdot b$, $i(a) = a^{-1}$. Аналогичным образом определяются алгебраические группы, соответственно с заменой слов „многообразие" на „алгебраические группы" и „гладкие отображения" на „регулярные отображения". Подобным же образом вводятся бирациональные группы.

Определение 2. Алгебра Ли над полем K — это векторное пространство V над K, снабжённое билинейной операцией $[\cdot;\cdot]\colon V \otimes V \to V$, называемой зачастую *коммутатором* и удовлетворяющей следующим тождествам:

1. *Кососимметричность:* $[a;\, b] = -[b;\, a]$*;*

2. *Тождество Якоби:* $[a;\, [b;\, c]] = [[a;\, b;\, \cdot]][c] + [b;\, [a;\, c]]$ *(то есть* $[a;\, \cdot]$ *является дифференцированием на алгебре).*

Векторное поле на группе Ли называется *левоинвариантным*, если для любого элемента группы $g \in G$ с действием на группе левым умножением L_g верно, что $\mathbf{v} \circ L_g = TL_g \circ \mathbf{v}$. Здесь TL_g — дифференциал отображения L_g. Аналогично определяется *правоинвариантное* векторное поле. Несложно видеть, что левоинвариантное векторное поле на группе полностью определяется своим значением в единице, поэтому пространство левоинвариантных полей изоморфно касательному пространству к группе в единице. На пространстве (всех) векторных полей существует естественная структура алгебры Ли. А именно, существует изоморфизм между векторными полями и дифференцированиями на алгебре гладких функций на многообразии, задаваемый по правилу $\mathbf{v} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$, где $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ — производная Ли по направлению поля $\mathbf{v}$. Структура алгебры Ли на множестве дифференцирований задаётся по правилу

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{v};\, \mathbf{u}]} := [\mathcal{L}_{\mathbf{v}};\, \mathcal{L}_{\mathbf{u}}] = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\mathbf{u}} - \mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

Оператор $\mathcal{L}_{[\mathbf{v};\, \mathbf{u}]}$ также является дифференцированием и называется *коммутатором* операторов. Указанные выше изоморфизмы индуцируют структуру алгебры Ли на пространстве векторных полей и, как следствие, на касательном пространстве к группе в 1. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли группы* G.

Упражнение 3. Проверить, что коммутатор левоинвариантных векторных полей есть левоинвариантное поле.

B. Примеры алгебраических групп и групп Ли

Рассмотрим некоторые примеры групп Ли.

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — простейшие модельные примеры. Аналогично $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ (группы по умножению), $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$. По аналогии возможно определить понятие p-адических групп Ли, тогда их примерами будут группы $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p^*$, $\mathbb{Z}_p^*$.

2. Все классические матричные группы. Над полями вещественных/комплексных/p-адических чисел они являются вещественными/комплексными/p-адическими группами Ли, соответственно. В общем случае они являются алгебраическими группами.

   - GL_n — обратимые матрицы $n \times n$. Этот пример имеет смысл даже для матриц с кватернионными коэффициентами;
   - SL_n — матрицы с определителем 1;
   - SO_n — ортогональные матрицы, т.е. $UU^T = 1$. Над $\mathbb{R}$ группа ортогональных матриц имеет двулистное накрытие $Spin_n$;
   - Sp_{2n} — симплектические матрицы, т.е. $U\Omega U^T = \Omega$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Над $\mathbb{R}$ эта группа имеет двулистное накрытие, называемое *метаплектической группой*;

3. Алгебраические подгруппы в GL_n. Например, верхнетреугольные, строго верхнетругольные, блочно верхнетреугольные матрицы.

4. $Aut\,(A)$, где A — конечномерная K-алгебра, является алгебраической группой над K.

5. $Inv\,(A)$ — множество обратимых элементов конечномерной ассоциативной алгебры с единицей, является алгебраической группой.

6. Вещественные и копмлексные торы $\mathbb{R}^n/\Lambda$, $\mathbb{C}^n/\Lambda$, Λ — целочисленная решётка в n-мерном пространстве.

7. Эллиптические кривые над любым полем являются алгебраическими группами.

8. Накрытие над группой Ли имеет естественную единственную структуру группы Ли, согласованную с проекцией.

9. Группы струй (бесмконечного порядка) над полем K: $J_\infty(K) = \mathrm{Aut}\,(K(t)) = \mathrm{Aut}\,(K[[t]] \diagup K)$.
$$J_\infty(K) = \left\{ \sum_{i>0} a_i t^i \mid a_i \in K,\ a_1 \neq 0 \right\}$$

С группой струй связаны её подгруппы

$$J_{>n}(K) = \left\{ t + \sum_{i>n} a_i t^i \right\} \hookrightarrow J_\infty(K)$$

и факторгруппы $J_n(K) = J_\infty(K) \diagup J_{>n}(K)$ струй конечного порядка. Аналогично можно ввести группы струй для рядов от нескольких переменных. Группы струй являются естественной областью определения дифференциальных операторов. В дифференциальной геометрии они возникают при сопоставлении гладкой функции на многообразии её ряда Тейлора в некоторой точке.

10. Группы Витта поля K. Рассмотрим последовательность $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_i \in K$. Сопоставим ей вектор Витта $\left(x^{(i)}\right)$ по правилу

$$x^{(n)} = \sum_{d|n} \frac{n}{d} (x_d)^{n/d}$$

Формула обращения Мёбиуса позволяет выразить x_i через $x^{(i)}$. Зависимость будет иметь вид $x_n = x^{(n)} + F\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right)$, где F — некоторая рациональная функция. Введём на множестве векторов Витта структуру кольца по правилу

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^{(n)} &= x^{(n)} + y^{(n)} \\ (x \otimes y)^{(n)} &= x^{(n)} y^{(n)} \\ (\ominus x)^{(n)} &= -x^{(n)} \end{aligned}$$

Здесь в правой части стоят операции в поле K. Эти операции индуцируют структуру коммутативного кольца с единицей на множестве последовательностей (x_i), причём все операции задаются рациональными функциями элементов последовательности. Более того,

$$\begin{aligned} (x \oplus y)_n &= x_n + y_n + a_n(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}) \\ (x \otimes y)_n &= x_n y_n + m_n(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}) \\ (\ominus x)_n &= -x_n + o_n(x_1, y_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Построенное кольцо называется *кольцом Витта*. Группа Витта — это его аддитивная группа. Пусть S — некоторое мультипликативно замкнутое подмножество в $\mathbb{Z}_{>0}$. Тогда с ним можно связать группу Витта $W_S(K)$

последовательностей, зануляющихся вне S. Это будет кольцо, так как в определении операций на группе участвовали только делители числа n. Если $I \hookrightarrow S$ — произвольный идеал в S ($\forall a \in S\colon aI \subset I$), то $W_I(K)$ — идеал в $W_S(K)$. Определим группу $W_{p^\infty}(K)$ как группу W_S для $S = \{n \in \mathbb{Z}_{>0},\ p|n\}$ и идеал в ней $W_{p^{\geqslant m}}$, соответствующий идеалу $I = \{n \in S, \quad p^m|n\}$. Теперь мы можем ввести группы $W_{p^m} = W_{p^\infty} \diagup W_{p^{\geqslant m}}$. Примеры: $W_{p^m}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z} \diagup p^m\mathbb{Z}$, $W_{p^\infty}(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$. Некоторые её свойства:

- Она коммутативна;
- Если $\mathrm{char} K = p$, то не существует нетривиальных сюрьективных морфизмов $W_{p^n}(K) \to K^n$;
- Операции сдвига $V : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, \dots)$ и фробениуса $F : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_0^p, x_1^p, \dots)$ коммутируют с $\oplus$ и $\otimes$.

C. Примеры алгебр Ли

Рассмотрим теперь некоторые примеры алгебр Ли.

1. Тривиальная алгебра на любом векторном пространстве: $[\cdot;\,\cdot] \equiv 0$.
2. Алгебры Ли классических матричных групп Ли, обозначаемые $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{sp}_{2n}$. Так как алгебра Ли группы и её накрытия совпадают, то группы $Spin_n$ и Mp_{2n} имеют также алгебры $\mathfrak{so}_n$ и $\mathfrak{sp}_n$.
3. Аналогично с алгебраическими подгруппами матричных групп.
4. Алгебра дифференцирований на любой K-алгебре A, т.е. K-линейные операторы $d : A \to A$, удовлетворяющие тождеству Лейбница $d(ab) = (da)\,b + a\,(db)$.
5. Таким образом возникает алгебра дифференцирований кольца струй (на группе струй есть естественное умножение), имеющая вид $\mathfrak{J}_\infty(K) = \left\{\sum_{i \geqslant 1} a_i x^i \frac{d}{dx}\right\}$.
6. На ассоциативной K-алгебре A можно задать стуктуру алгебры Ли по правилу $[a;\,b] = ab - ba$.

7. Группа G называется p-группой, если $|G| = p^n$. Композиционный ряд группы определяется по правилу $G_1 = G$, $G_{i+1} = [G_i;\, G]$. Группа называется нильпотентной, если $G_n = 0$ при $n \gg 1$. Верны следующие утверждения:

   - Любая p-группа нильпотентна;
   - Если $G_n = 0$, то G_{n-1} лежит в центре G;
   - G_{i+1} — нормальная подгруппа в G_i, причём группа $G_i \big/ G_{i+1}$ абелева;
   - $[G_i;\, G_k] \hookrightarrow G_{i+k}$;

   При этом на группе $L = \bigoplus_i G_i \big/ G_{i+1}$ можно ввести структуру алгебры Ли по правилу
$$[aG_{i+1};\, bG_{k+1}] = [a;\, b]G_{i+k+1}$$
   Здесь в правой части стоит коммутатор в группе G. Полученная алгебра Ли называется алгеброй Ли, ассоциированной с p-группой.

Группы Ли естественно возникают при изучении симметрий дифференциальных уравнений. Исторически Софус Ли ввёл их как раз для геометрического исследования свойств дифференциальных уравнений. Аналогично, алгебраические группы описывают симметрии алгебраических уравнений. Однако некоммутативные группы — очень сложный для исследования объект, гораздо проще исследовать связанную с ними линейную структуру: алгебры Ли.

Упражнение 4. Найти все связные замкнутые подгруппы в группах матриц вида $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как построение алгебры Ли по группе Ли функториально, то любая подгруппа определяет подалгебру, а нормальная подгруппа — идеал. Заметим, однако, что не любая подалгебра соответствует некоторой подгруппе Ли. В положительной характеристике контрпример дают векторы Витта. В нулевой характеристике можно рассмотреть однопараметрическую подгруппу $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^z & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\sqrt{2}z} \end{pmatrix} \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$. Это не есть алгебраическая подгруппа алгебраической группы $GL_2(\mathbb{C})$, хотя вектор $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

порождает алгебраическую подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$. В вещественном случае можно рассмотреть всюду плотную обмотку на торе, которая не является подмногообразием и не является поэтому подгруппой Ли.

Примером применения теории групп Ли для исследования свойств уравнений является нахождение преобразований Лоренца как группы (точечных) симметрий уравнений Максвелла в электродинамике.

D. Литература

- Хороший вводный учебник, где разбираются лёгкие теоремы или лёгкие случаи общих теорем: Винберг, Онищик „Семинары по алгебраическим группам и группам Ли”.
- Подробно основы групп Ли разобраны в книге Бурбаки „Группы и алгебры Ли” (в 4х томах). В основном здесь разбирается геометрия.
- Над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ можно читать Серр „Группы и алгебры Ли”.
- По аффинным и алгебраическим группам: Хамфрис „Линейный алгебраические группы”.
- Можно найти и по проективным алгебраическим группам.
- Подробное изучение алгебр Ли: Хамрис „Введение в теорию алгебр Ли и их представлений”.
- О теории инвариантов и представлении классических групп см. Г. Вейль „Классические группы. Их инварианты и представления”.
- О связи с физикой: Ван дер Варден „Теория групп и её связь с квантовой механикой”.

II. Гомоморфизмы и подгруппы.

A. Действие групп

Определение 5. Группа Ли G действует на многообразии M $(G : M)$, если задано гладкое отображение $G \times M \to M$, $(g; m) \mapsto g(m)$, так что

- $1(m) = m$
- $g(h(m)) = (gh)(m)$

Группа G действует на многообразии M *транзитивно*, если $\forall m, n \in M. \exists g \in G. g(m) = n$. Стабилизатор точки $x \in M$ будем обозначать $G_x = stab_G(x) = \{g \in G | g(x) = x\}$. Многообразие, на котором группа действует транзитивно, будем называть главным. Если группа действует свободно ($G_x = 0$), то пространство называется однородным.

Упражнение 6. Пусть многообразие M связно, группа Ли G действует транзитивно на M. Тогда

- $G_0 : M$ транзитивно, где G_0 — связная компонента единицы группы;
- $G/G_0 \simeq G_x/(G_x \cap G_0)$;
- $\exists x \in M. G_x \,\text{связно} \implies G \,\text{связно}$;
- $G/G_x = M$;

Примеры-упражнения: ($K = \mathbb{R}$ или $K = \mathbb{C}$)

- $SL_n(K) : (K^n \backslash 0)$ транзитивно, $G_x \simeq SL_{n-1}(K) \times K^{n-1}$;
- $SO_n(K) : \{\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$, $G_x \simeq SO_{n-1}$;
- $Sp_{2n}(K) : (K^{2n} \backslash 0)$ транзитивно, $G_x \simeq Sp_{2n-2} \times K^{2n-1}$;
- $O_n(K) : \{\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1\}$, $G_x \simeq O_{n-1}$. Эта группа имеет две компоненты связности;
- $O_{p,q}(\mathbb{R})$ — это подгруппа в $GL_{p+q}(\mathbb{R})$, сохраняющая квадратичную форму сигнатуры (p, q). Если $p \neq 0$, $q \neq 0$, то эта группа имеет 4 компоненты связности. Найти их. Чему равен фактор по компоненте связности единицы?

Упражнение 7.

1. $H < G \implies G/H$ — главное многообразие.

2. $H \lhd G \implies G/H$ — группа Ли.

3. $H < G \implies T_1H \hookrightarrow T_1G$ — подалгебра Ли. Если подгруппа H нормальна, то T_1H — идеал в T_1G.

4. $\phi : H \to G$. $\mathrm{d}\phi : T_1H \to T_1G$ — гомоморфизм алгебр Ли.

5. Ядро гомоморфизма групп Ли есть подгруппа Ли.

6. Алгебра Ли группы и её связной компоненты единицы совпадают.

7. Доказать 3, 4, 5, 6 для алгебраических групп. 1 и 2 мы докажем позднее.

B. Накрытия и спиноры

Теорема 8. *Пусть G – группа Ли, $\phi : H \to G$ — односвязное накрытие многообразий. Тогда существует единственная структура группы Ли на H, такая что*

- ϕ — *гомоморфизм;*
- $\mathrm{d}\phi$ — *изоморфизм алгебр Ли;*
- *умножение в группе коммутирует с проекцией;*
- $\ker\phi$ — *абелева группа;*
- $\phi : H \to G$ — *накрытие с группой Галуа* $\ker\phi$.

Для доказательства рассмотрим пространство путей ΠG с началом в 1 на G. Это группа, умножение определено поточечно. Верно, что

$$\begin{tikzcd} \Pi G \arrow[r] \arrow[dr] & H \arrow[d] \\ & G \end{tikzcd}$$

Это определяет структуру группы на H. Из рассмотрения гомоморфизмов получаются искомые утверждения.

Определение 9. Пусть V — векторное пространсвво с невырожденной квадратичной формой Q. Алгебра Клиффорда:

$$Cl\left(V,Q\right)=TV/\left(v\otimes v=Q\left(v\right)\right)$$

$$TV=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V^{\otimes n}$$

Предложение 10.

1. $\dim Cl\left(V,Q\right)=2^{\dim V}$.

2. *Существует разложение* $Cl\left(V,Q\right)=Cl^{+}\oplus Cl^{-}$ *в градуированную сумму подалгебр размерностей* $2^{\dim V-1}$.

3. $V\hookrightarrow Cl\left(V,Q\right)$.

4. *Рассмотрим множество обратимых элементов* $Inv\left(Cl\left(V,Q\right)\right)$. *Для невырожденной формы* Q *множество* $G=\left\{s\in Inv\left(Cl\left(V,Q\right)\right)|sVs^{-1}=V\right\}$ *непусто.*

5. *Существует антиавтоморфизм* $Cl\left(V,Q\right)$, *задаваемый по правилу* $\beta\left(v_{i_1}\dots v_{i_s}\right)=v_{i_s}\dots v_{i_1}$.

6. *Группа спиноров определяется как* $Spin\left(V,Q\right)=\left\{s\in G\cap Cl^{+}|s^{-1}=\beta\left(s\right)\right\}$.

7. $Spin\left(V,Q\right)$ *имеет представление* $\rho:Spin\left(V,Q\right)\to GL\left(V\right)$, $\rho_s\left(v\right)=svs^{-1}$. $\operatorname{Im}\rho=SO\left(V,Q\right)$.

8. *Группа спиноров связна над* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{C}$.

9. *Точная последовательность групп:* $0\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to Spin\left(V,Q\right)\to SO\left(V,Q\right)\to 0$.

Таким образом, любая группа $SO\left(V,Q\right)$ имеет двулистное накрытие, являющееся спинорной группой.

Определение 11. Метаплектическая группа Mp_{2n} — это двулистное накрытие симплектической группы, т.е.

$$0\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to Mp_{2n}\to Sp_{2n}\to 0$$

Упражнение 12. Пусть $H \lhd G$ (нормальная подгруппа в G), тогда существует точная последовательность гомотопических групп

$$0 \leftarrow H/H_0 \leftarrow \pi_1(G/H) \leftarrow \pi_1(G) \leftarrow \pi_1(H) \leftarrow \pi_2(G/H) \leftarrow \dots$$

Вывод 13. *Пусть $\pi_1(G/H) = \pi_2(G/H) = 0$, тогда $\pi_1(G) \simeq \pi_1(H)$.*

Вывод 14. *Пусть $\pi_1(H) = 0$ и H связна. Тогда $\pi_1(G) \simeq \pi_1(G/H)$.*

Примеры:

- $\pi_1(SL_n(\mathbb{C})) = 0$;
- $\pi_1(SO_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $\pi_1(Sp_{2n}(\mathbb{C})) = 0$;
- $\pi_1(SL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$ при $n \geqslant 2$;
- $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ при $n \geqslant 3$;
- Чему равны $\pi_1(Sp_{2n}(\mathbb{R}))$? $\pi_1\left(O_{p,q}(\mathbb{R})_0\right)$?

C. Экспоненциальное отображение

Определение 15. Экспоненциальное отображение $\mathfrak{g} \to G$ определяется как $u \in \mathfrak{g} \mapsto g_u(1)$, где функция $g_u : \mathbb{R} \to G$ является решением дифференциального уравнения $\frac{dg}{dt}(t) = TR_{g(t)} \circ u$, $g(0) = 1$. Соответствующая функция (экспонента) определяет однопараметрическую подгруппу в G, обозначаемую $\exp(tu)$ или Φ_t^u. Это следует из того, что гладкое дифференциальное уравнение первого порядка имеет единственное решение, а функции $g_u(t+s)$ и $g_u(t)\,g_u(s)$ обе являются решением с одинаковыми начальными условиями.

Уравнение на экспоненту можно также рассмотреть как уравнение в группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(G)$:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^u = \xi \circ \Phi_t^u, \quad \Phi_0^u = \mathrm{id}$$

Здесь $\xi : G \to TG$ — векторное поле. Экспонента в G соответствует подгруппе Φ_t^u для левоинвариантного поля ξ.

Лемма 16. $\Phi_t^u(g) = \Phi_t^u(1) \cdot g$

Это следует из теоремы единственности Коши.

Экспонента определяет гомоморфизм $\mathbb{R} \to G$ для каждого вектора $u \in \mathfrak{g}$. Однако, она не является гомоморфизмом $\mathfrak{g} \to G$, так как группа G в общем случае не коммутативна. Таким образом, она определяет лишь некоторое отображение многообразий. Большое значение имеет его множество критических точек.

Теорема 17. *Пусть $f_1, f_2 : G \to H$ — гомоморфизмы групп Ли с равными дифференциалами: $df_1 = df_2$. Тогда $f_1 = f_2$.*

Доказательство. Гомоморфизмы групп Ли удовлетворяют на любой экспоненциальной однопарамерической подгруппе $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \xi(t) \circ g(t)$ дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f_i(g(t))}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{d}f_i(\xi(t)) \circ f_i(g(t)) \\ f_i(g(0)) &= 1 \end{aligned}$$

Из теоремы Коши следует искомое утверждение. □

Упражнение 18.

1. $f : G \to H$, G, H — сявзные группы Ли. Пусть H_1 — подгруппа в $\tilde{H}$. Если $\mathrm{d}f(T_1 G) \hookrightarrow T_1 \tilde{H}$, то $f(G) \subset \tilde{H}$.

2. Если H_1, H_2 — связные подгруппы в G, и $T_1 H_1 = T_1 H_2 \subset T_1 G$, то $H_1 = H_2$.

3. Пусть

   $$\begin{aligned} \frac{\partial g(t,s)}{\partial t} &= \xi(t,s) \circ g(t,s) \\ \frac{\partial g(t,s)}{\partial s} &= \eta(t,s) \circ g(t,s) \end{aligned}$$

   Тогда $[\xi(t,s); \eta(t,s)] = \frac{\partial \xi(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial \eta(t,s)}{\partial t}$.

4. Пусть G — односвязная группа Ли, H — связная группа Ли, $\alpha : T_1 G \to T_1 H$ — гомоморфизм алгебр Ли. Тогда $\exists f : G \to H.\, \mathrm{d}f_1 = \alpha$.

5. Пусть $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Тогда решение уравнения $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = AU(t)$, $U(0) = 1$ даётся рядом для матричной экспоненты: $U(t) = \exp tA$.

Поэтому отображение называется экспоненциальным. Обратное отображение называется логарифмом. Вообще говоря, оно определено лишь в окрестности единицы группы.

Теорема 19. *Экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на окрестность единицы в G.*

Упражнение 20.

1. В группе $SL_2(\mathbb{R})$ экспоненциальное отображение не является сюрьективным.

2. Связная группа Ли порождается своей окрестностью единицы, т.е. любой элемент группы можно представить в виде $\exp(t_1 X_1) \cdot \dots \cdot \exp(t_n X_n)$, где $X_{1,\dots,n}$ — базис в алгебре Ли.

3. $\exp(gXg^{-1}) = g \cdot \exp(X) \cdot g^{-1}$. Здесь gXg^{-1} — образ X под действием дифференциала отображения $G \ni h \mapsto ghg^{-1}$. Это действие группы на алгебре Ли, называемое *присоединённым действием группы* $\mathrm{ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

4. $\exp Y \cdot \exp X \cdot \exp(-Y) = \sum_n \frac{1}{n!} \mathrm{Ad}_Y^n(X)$. $\mathrm{Ad}_Y(X) = [Y; X]$ — присоединённое действие алгебры Ли на себе.

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{ad}_{\exp(tX)} = \mathrm{Ad}_X$.

6. Формула Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа:
$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{\substack{r_i + s_i > 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n (r_i + s_i)\right)^{-1}}{r_1! s_1! \dots r_n! s_n!} \mathrm{Ad}_X^{r_1} \mathrm{Ad}_Y^{s_1} \mathrm{Ad}_X^{r_2} \mathrm{Ad}_Y^{s_2} \dots \mathrm{Ad}_X^{r_n} \mathrm{Ad}$$

7. Доказать, что этот ряд сходится.

8. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log(\exp(hX)\exp(hY)) = X + Y$

9. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \log[\exp(hX)\exp(hY)\exp(-hX)\exp(-hY)] = [X; Y]$

Упражнение 21. Коммутатор векторных полей на многообразии в локальных координатах даётся формулой

$$[\sum_i a_i\,(x)\,\partial_i;\ \sum_i b_i\,(x)\,\partial_i] = \sum_{ik} (a_i \partial_i b_k - b_i \partial_i a_k)\,\partial_k$$