Экзамен по курсу "Группы Ли и алгебраические группы"Я.В. Абрамова

При решении можно пользоваться всем, что было в курсе, но быть готовым, что я спрошу, как доказывается тот или иной факт из курса. Впрочем зверствовать я не буду, степень подробности все-таки умеренная и цивилизованная.

1. Пусть G, H - группы Ли, причем G - связная и односвязная. Пусть $\alpha\colon T_1G \to T_1H$ - гомоморфизм алгебр Ли. Тогда существует (и единственен) гомоморфизм групп Ли $f\colon G \to H$, такой что $df\mid_1 = \alpha$

2. $f\colon G \to H$ - гомоморфизм алгебраических групп, следовательно $f(G)$ - замкнут в H.

3. Для любой аффинной алгебраической группы G (в характеристике ноль) и любой ее замкнутой подгруппы H существует такое регулярное представление $G \to GL(V)$ и точка $x \in \mathbb{P}(V)$, такие что $H = Stab_x(\mathbb{P}(V))$.

4. Найти $\pi_1(Sp_{2n}(\mathbb{C}))$.

5. Сколько компонент связности у $O_{p,q}(\mathbb{R})$? Как их задать?

6. Доказать теорему о Жордановой нормальной форме для элементов аффинных алгебраических групп а) в характеристике 0, б) в характеристике p

7. Исследовать на приводимость $SL_n(\mathbb{C})$-модуля $\Lambda^k\mathbb{C}^n$, найти его старшие веса, старшие векторы и неприводимые подпредставления.

8. Исследовать на приводимость $SL_n(\mathbb{C})$-модуля $S^k\mathbb{C}^n$, найти его старшие веса, старшие векторы и неприводимые подпредставления.

9. Найти корневое разложение у SO_{2n}, найти его положительные и простые корни относительно какой-нибудь (на Ваш вкус) гиперплоскости, найти группу Вейля.

10. $\{f \in S^k\mathbb{C}^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} \partial^2 f \partial x_i^2 = 0\}$ - SO_{2n}-модуль, у которого надо найти старшие веса, старшие векторы и неприводимые подпредставления.

11. $\Lambda^k\mathbb{C}^{2n}$ - SO_{2n}-модуль, у которого надо найти старшие веса, старшие векторы и неприводимые подпредставления.

12. Найти все двумерные системы корней.

13. Доказать теорему о том, что если α и $c\alpha$ ($c \in \mathbb{k}$) - корни в полупростой алгебре Ли, то $c = \pm 1$.

14. Доказать теорему о том, что если α и β - корни в полупростой алгебре Ли, то $\alpha - \frac{2^*(\alpha,\beta)}{^*(\beta,\beta)}\beta$.

15. Доказать, что если V, W - конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и имеют одинаковый старший вес, то они изоморфны.

Замечания:

а) Жорданова нормальная форма в аффинной алгебраической группе и то, что она сохраняется при гомоморфизме, это совсем просто, я об этом скажу, но это просто следует из классификации всех подгрупп в мультипликативной группе поля,

б) Замыкание подгруппы в любой топологической группе это снова подгруппа, т.к. прообраз замыкания при умножении замкнут, а замыкание прямого произведения это прямое произведение замыканий, из чего следует, что прямое произведение замыканий отображается в замыкание.

в) я немного забываюсь, когда говорю вместо "подгруппа Ли в группе Ли"фразу "замкнутая подгруппа в группе Ли". вроде бы это верно, что они совпадают. но это к приложениям отношения вроде бы не имеет (ну или можно поискать у топологов типа Понтрягина этот результат)

г) я буду продолжать давать серии упражнений, заменяющие изложение теории, иначе я бы успел рассказать только основы теории групп Ли. Хочется же дать представление о том, что извлекается из этой теории, плюс некоторые продвинутые вещи типа теории корней и весов. Если же вам надо получить понимание основ теории групп Ли и алгебраических групп, можно воспользоваться теми учебниками, что я написал на страничке курса.