Аффинные алгебраические многообразия

Пусть k – некоторое поле.

Определение 1. *Аффинным n-мерным пространством* $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ над k называется множество наборов $(x_1, \ldots, x_n), x_i \in \mathsf{k}$ элементов k длины n.

Алгебраическим подмножеством аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ называется множество решений некоторой (возможно, бесконечной) системы уравнений $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $f_\alpha \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – многочлены.

Как мы позже увидим, на самом деле всегда достаточно конечного числа уравнений – остальные будут из них следовать.

Пример 2.

1. окружность – задаётся уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в вещественной плоскости $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$;
2. параметризованная кривая $\{(t^2, t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ задаётся уравнениями $x^3 - y^2 = z - x^2 = 0$;
3. точка $(a_1, \ldots, a_n)$ задаётся уравнениями $x_i - a_i = 0$.
4. график функции $y = \sin x$ – не алгебраическое подмножество.

Лемма 3. *Объединение и пересечение алгебраических подмножеств – алгебраическое подмножество.*

Доказательство. Пусть алгебраические подмножества V и W заданы системами уравнений $f_i = 0$ и $g_j = 0$. Тогда $V \cap W$ задаётся системой $f_i = g_j = 0$, а $V \cup W$ – системой $f_i g_j = 0$ (все попарные произведения). $\square$

Одно и то же подмножество можно задавать разными системами уравнений. Рассмотрим максимальную из них.

Определение 4. *Идеалом* алгебраического подмножества $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется

$$I(V) = \{f \in \mathsf{k}[x_i] \mid f|_V = 0\}$$

– множество всех многочленов, обращающихся в ноль тождественно на V.

Очевидно, идеал многообразия – это идеал в кольце функций на аффинном пространстве.

Изучим для начала простейший пример аффинных подмножеств – кривые на плоскости. Будем считать временно, что основное поле – алгебраически замкнутое характеристики ноль.

Определение 5. *Плоской алгебраической кривой* $C_f \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ назовём множество решений уравнения $f(x, y) = 0$, где $f \in \mathsf{k}[x, y]$ – многочлен.

Если $f = f_1 f_2$, то кривая распадается в объединение двух кривых: $C_f = C_{f_1} \cup C_{f_2}$. Естественно поэтому изучить кривые, заданные неприводимым многочленом f.

Что будет, если пересечь две плоские кривые? Чтобы это понять, докажем две леммы.

Лемма 6. *Если многочлен $g \in \mathsf{k}[x, y]$ обращается в ноль тождественно на C_f, то $g^N \vdots f$ для некоторой степени N.*

Доказательство. Сделав линейную замену переменных, можно считать, что f содержит член x^N, где $N = \deg f$. Тогда можно делить на f с остатком в кольце многочленов $(\mathsf{k}[y])[x]$ (как многочлены от x). При любом фиксированном значении $y = y_0$ корни f лежат среди корней g. Поскольку возможны кратности, то $g(x, y_0)^N \vdots f(x, y_0)$. Поделим с остатком как многочлены от x: $g^N = f \cdot q + r$, $\deg_x r < \deg f$. При любом y_0 имеем $r(x, y_0) = 0$, а значит $r = 0$. $\square$

Следствие 7. *Если многочлен $g \in \mathsf{k}[x, y]$ обращается в ноль на множестве нулей неприводимого многочлена f, то $g \vdots f$. Другими словами, $I(C_f) = (f)$.*

Следствие 8. *Если f неприводим, то кривая C_f не представляется в виде объединения двух нетривиальных (отличных от C_f) алгебраических подмножеств.*

Доказательство. Если $C_f = C_1 \cup C_2$, то найдутся многочлены f_1 и f_2, для которых f_i обращается в нуль на C_i, но не на C_f. Тогда $f_1 f_2$ равен нулю на C_f, значит $f_1 f_2 \vdots f$. Так как f неприводим, то f_1 или $f_2 \vdots f$ и значит f_1 или f_2 равен нулю на C_f – противоречие. $\square$

Определение 9. Алгебраическое подмножество называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух строго меньших непустых алгебраических подмножеств.

То есть, множество нулей неприводимого многочлена на плоскости – неприводимая кривая.

Теперь пересечём неприводимую кривую нетривиальным образом.

Лемма 10. *Пусть многочлен $f \in \mathsf{k}[x, y]$ неприводим и g не делится на f. Тогда пересечение $C_f \cap C_g$ – конечное множество.*

Доказательство. Рассмотрим НОД f и g в кольце $\mathsf{k}(y)[x]$. Пусть он равен многочлену $h(x, y) \in \mathsf{k}[x, y]$ с точностью до умножения на обратимые, причём коэффициенты h по степеням x взаимно просты. Тогда $f \vdots h$ в $\mathsf{k}(y)[x]$ влечёт $f \vdots h$ в $\mathsf{k}[y, x]$. Так как f неприводим, $h = 1$ либо $h = f$. Во втором случае $g \vdots f$ в $\mathsf{k}(y)[x]$ и значит в $\mathsf{k}[y, x]$ – противоречие условию. Поэтому $h = 1$. Запишем $1 = \alpha g + \beta f$, где $\alpha, \beta \in \mathsf{k}(y)[x]$. Тогда для всех y_0 (кроме конечного числа нулей знаменателей в α и β) получим, что $f(x, y_0)$ и $g(x, y_0)$ не могут иметь общих корней по x. А для конечного числа y_0 получим конечное число корней, т.е. точек пересечения C_f и C_g. $\square$

Следствие 11. *Алгебраические подмножества аффинной плоскости (нетривиальные) – это конечные объединения неприводимых кривых (заданных неприводимым многочленом) и точек.*

Доказательство. Рассмотрим последовательно уравнения, задающие подмножество. C_{f_1} есть объединение конечного числа неприводимых кривых. Пересекая далее каждую из них с нулями многочленов, получим либо конечное число точек, либо её саму. $\square$

Так же, как и плоские кривые, любые алгебраические подмножества раскладываются в объединение неприводимых. Это вытекает из следующего свойства, называемого нётеровостью: всякая строго убывающего последовательность алгебраических подмножеств конечна.

Введём на алгебраическом подмножестве V *топологию Зарисского* – назовём замкнутыми множествами всевозможные алгебраические подмножества V. Из леммы 3 (с бесконечными пересечениями) следует, что это действительно топология.

Базис топологии Зарисского образуют множества $D_f = \{x \in V \mid f(x) \neq 0\}, f \in \mathsf{k}[x_i]$. Действительно, любое открытое подмножество $U \subset V$ есть дополнение до множества нулей некоторого набора многочленов f_α. Тогда $U = \cup D_{f_\alpha}$.

Определения неприводимости и нётеровости в действительности имеют смысл для любых топологических пространств:

Определение 12. Топологическое пространство X называется *неприводимым*, если из $X = X_1 \cup X_2$, где X_i замкнуты, следует X_1 или $X_2 = X$.

Топологическое пространство называется *нётеровым*, если всякая строго убывающего последовательность его замкнутых подмножеств конечна.

Предложение 13. *1. Пространство $\mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ с топологией Зарисского нётерово.*

2. Замкнутые и открытые подпространства нётерова топологического пространства нётеровы.

3. Нётерово топологическое пространство раскладывается в конечное объединение попарно не вложенных неприводимых подпространств, причём единственным образом.

Доказательство. 1. Это мы докажем позднее.

2. Это почти очевидно.

3. Докажем существование разложения. Пусть X приводимо, запишем $X = X' \cup X''$. Если и X', и X'' раскладываются в объединение неприводимых, то и X тоже - всё доказано. Иначе обозначим через X_1 то из X' и X'', которое не раскладывается, и применим к нему этот процесс индуктивно. Получим бесконечную убывающую последовательность вложенных замкнутых подпространств – противоречие с нётеровостью. В полученном разложении выкинем все вложенные компоненты.

   Единственность: если $X = \cup X_i = \cup X'_i$, то
   $$X_1 = X_1 \cap (\cup X'_i) = \cup (X_1 \cap X'_i).$$
   В этом представлении X_1 в виде объединения замкнутых обязательно $X_1 = X_1 \cap X'_s$ для некоторого s, значит $X_1 \subset X'_s$. Аналогично, X'_s вложено в некоторое из X_i. Из того, что все X_i попарно не вложены, получаем, что $X_1 = X'_s$. Аналогично для всех компонент.

□

Следствие 14. *Любое алгебраическое подмножество единственным образом раскладывается в объединение попарно не вложенных неприводимых подмножеств. Эти подмножества называются его* неприводимыми компонентами.

Алгебраические подмножества плоской неприводимой кривой – конечные множества точек. Это можно взять за определение неприводимой кривой. Кривой далее естественно назвать конечное объединение неприводимых кривых. Неприводимой поверхностью назовём алгебраическое подмножество, нетривиальные алгебраические подмножества которого – конечные объединения кривых и точек, поверхностью – конечное объединение неприводимых поверхностей, и т.д.

Определение 15. *Размерностью* топологического пространства X называется максимум таких n, что существует цепочка строго вложенных неприводимых замкнутых подпространств

$$X \supset X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_n.$$

Размерностью алгебраического подмножества называется его размерность как топологического пространства с топологией Зарисского.

Очевидно, что размерность аффинной прямой – 1, и мы показали, что размерность аффинной плоскости – 2. Конечно, верно и то, что размерность A^n_{k} равна n, но доказать это совсем не просто.

Чтобы склеивать из аффинных многообразий любые алгебраические, нам понадобится определить хорошие (т.н. регулярные) функции.

Определение 16. Функция $F\colon V \to \mathsf{k}$ на алгебраическом подмножестве $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется *регулярной*, если найдётся многочлен $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ такой, что $F = f|_V$.

Можно дать и другое, локальное определение – функция F регулярна, если для любой точки $x \in V$ найдётся открытое подмножество $x \in U \subset V$ и многочлен f, для которых $F = f|_U$. Как эти определения соотносятся, мы увидим позднее. Пока лишь заметим, что регулярные функции непрерывны в топологии Зарисского.