Регулярные функции и отображения. Алгебра регулярных функций.

Определение 1. *Регулярной функцией* на алгебраическом подмножестве $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется ограничение многочлена, т.е. $F|_X$, где $F \in \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$.

Определение 2. *Регулярной функцией* на открытом подмножестве алгебраического подмножества $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ называется ограничение рациональной функции, т.е. $\frac{F}{G}\big|_X$, где $F, G \in \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и G не обращается в 0 на X.

Для аффинных многообразий у нас есть два разных определения регулярной функции. Как мы позже увидим, они равносильны в случае алгебраически замкнутого поля.

Определение 3. *Аффинным алгебраическим многообразием* называется алгебраическое подмножество в аффинном пространстве вместе с классом регулярных функций на нём.

Квазиаффинным алгебраическим многообразием называется открытое подмножество в алгебраическом подмножестве в аффинном пространстве вместе с классом регулярных функций на нём.

Определение 4. *Регулярным отображением* алгебраических подмножеств $X \to Y$, где $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$, $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ называется отображение вида $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$, где ϕ_i – регулярные функции на X и $\operatorname{im}\phi \subset Y$.

Определение 5. Алгебраические подмножества называются *изоморфными*, если между ними существуют взаимно обратные регулярные отображения.

Пример 6. Аффинная кривая $xy - 1 = 0$ изоморфна квазиаффинному многообразию $\mathbb{A}^1 \setminus 0$. Взаимно-обратные отображения задаются формулами: $(x, y) \mapsto x$, $t \mapsto (t, 1/t)$

Множество регулярных функций на (квазиаффинном) многообразии X обозначается $\mathsf{k}[X]$ или $\mathcal{O}_X$. Регулярные функции можно складывать, вычитать и умножать, поэтому $\mathsf{k}[X]$ – кольцо. Скаляры являются регулярными функциями, поэтому $\mathsf{k}[X]$ – алгебра над k.

Если $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ аффинно, то алгебру функций несложно вычислить. Имеется сюръективный гомоморфизм ограничения $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n] \to \mathsf{k}[X]$. Его ядро по определению – идеал многообразия X, поэтому

$$\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Пусть $\phi\colon X \to Y$ – регулярное отображение. Оно определяет гомоморфизм ϕ^* на алгебрах функций в обратную сторону: если $f \in \mathsf{k}[Y]$, то положим $\phi^* f = f \circ \phi$.

Полученное соответствие, сопоставляющее алгебраическому многообразию кольцо функций на нём, а регулярному отображению многообразий – гомоморфизм колец, играет фундаментальную роль в алгебраической геометрии. Для аффинных многообразий алгебра функций содержит всю информацию о многообразии и, более того, во многих отношениях является более правильным объектом, чем само многообразие.

Посмотрим, как выражаются свойства многообразий в свойствах алгебр функций на них. Будем ниже под многообразием понимать аффинное алгебраическое многообразие.

Предложение 7. *Пусть $s\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ – гомоморфизм. Тогда он имеет вид ϕ^* для единственного регулярного отображения $\phi\colon X \to Y$.*

Доказательство. Пусть $Y \subset \mathbb{A}^m$, y_i – координатные функции на $\mathbb{A}^m$, а $\bar{y}_i \in \mathsf{k}[Y]$ – их ограничения на Y. Положим

$$\phi(x) = (s(\bar{y}_1)(x), \dots, s(\bar{y}_m)(x)).$$

Так как $s(\bar{y}_i)$ – регулярные на X функции, то ϕ регулярно по определению. Проверим, что $\operatorname{im}\phi \subset Y$. Пусть $f \in I(Y)$ – многочлен, покажем, что f обнуляется на образе ϕ. Действительно,

$$f(s(\bar{y}_1)(x), \dots, s(\bar{y}_m)(x)) = s(f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m))(x) = s(0)(x) = 0.$$

Ясно, что $\phi^* = s$ на всех $\bar{y}_i$ и значит, на всей алгебре $\mathsf{k}[Y]$. Ясно также, что ϕ единственно. □

Предложение 8. *Подмногообразия аффинных многообразий соответствуют сюръективным гомоморфизмам алгебр функций.*

Доказательство. Пусть $X \subset Y$ – аффинное подмногообразие. Любая регулярная функция на X – ограничение многочлена с аффинного пространства, а значит, и ограничение регулярной функции с Y. Поэтому имеем сюръекцию $\mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ – ограничение.

Обратно, если гомоморфизм $\phi^*\colon \mathsf{k}[Y] \to \mathsf{k}[X]$ сюръективен, пусть I – его ядро. Пусть подмногообразие $X' \subset Y$ – множество нулей всех функций из I. Тогда образ ϕ лежит в X', и если $f \in I(X')$, то $\phi(f) = 0$, поэтому $f \in I$. Значит $I = I(X')$ и для отображения $\psi\colon X \to X'$ имеем $\psi^*\colon \mathsf{k}[X'] = \mathsf{k}[Y]/I \to \mathsf{k}[X]$ – изоморфизм. По предложению 7 получаем, что ψ – изоморфизм, т.е. X – подмногообразие. □

Пример 9. Пусть $X = \mathbb{A}^1$, $Y = \mathbb{A}^2$, $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Тогда $\phi^*(x) = t^2$, $\phi^*(y) = t^3$. Образ ϕ^* – подкольцо $\mathsf{k}[t^2, t^3] \subset \mathsf{k}[t]$, т.е. ϕ^* не сюръективно. Хотя отображение ϕ и инъективно на множестве точек, оно не является вложением подмногообразия – его образ не изоморфен $\mathbb{A}^1$.

Предложение 10. *Отображение $\phi\colon X \to Y$ имеет плотный (в топологии Зарисского) образ титтк гомоморфизм ϕ^* инъективен.*

Доказательство. Если ϕ^* имеет нетривиальное ядро, возьмём $f \in \mathsf{k}[Y]$, $\phi^* f = 0$. Тогда образ ϕ (а значит, и его замыкание) лежит в замкнутом подмножестве $\{y \mid f(y) = 0\} \subset Y$, и потому не плотен. Обратно, если $\overline{\operatorname{im}\phi} \neq Y$, то найдётся ненулевая $f \in \mathsf{k}[Y]$ такая, что $f = 0$ на $\phi(Y)$. Значит, ядро ϕ^* нетривиально. □

Пример 11. Пусть $X = Y = \mathbb{A}^2$, $\phi(u, v) = (u, uv)$. Тогда $\phi^*(x) = u, \phi^*(y) = uv$, и ϕ^* инъективен. При этом образ ϕ состоит из точек (x, y), где $x \neq 0$, и точки $(0, 0)$. Он не замкнут и не открыт, но плотен.

Предложение 12. *Аффинное многообразие X неприводимо титтк в кольце $\mathsf{k}[X]$ нет делителей нуля.*

Доказательство. Если есть делители нуля: $f_1 f_2 = 0$, то получаем разложение: $X = \{f_1 = 0\} \cup \{f_2 = 0\}$. Обратно, если разложение $X = X_1 \cup X_2$ нетривиально, то найдутся функции f_i такие, что $f_i|_{X_i} = 0$ и $f_i \neq 0$. Тогда $f_1 f_2 = 0$, значит есть делители нуля. □

Предложение 13. *Вложения многообразия X в аффинное пространство соответствуют системам образующих в алгебре $\mathsf{k}[X]$.*

Доказательство. Если $X \subset \mathbb{A}^n$, то ограничения координатных функций $\bar{x}_i \in \mathsf{k}[X]$ порождают алгебру $\mathsf{k}[X]$. Обратно, системе порождающих $e_1, \ldots, e_n \in \mathsf{k}[X]$ соответствует сюръективный гомоморфизм $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathsf{k}[X]$, а значит, по предложению 8, вложение $X \subset \mathbb{A}^n$. □

Мы видели, что любой гомоморфизм алгебр функций определяет единственное отображение многообразий. А верно ли, что любая алгебра определяет единственное многообразие? Верно, если рассматривать достаточно хорошие алгебры. Какие именно?

Во-первых, алгебра функций обязана быть ассоциативной, коммутативной алгеброй над некоторым полем. Во-вторых, по предложению 13, она должна быть конечно порождена. Этого ещё недостаточно:

Пример 14. Алгебра $\mathsf{k}[t]/t^2$ не является алгеброй функций ни на каком многообразии. Действительно, элемент $\bar{x} \neq 0$, но $(\bar{x})^2 = 0$, а для функций такого не бывает.

Определение 15. *Нильпотентом* в кольце называется элемент a такой, что $a^N = 0$ при некотором натуральном N.

Несложно проверить, что нильпотенты в коммутативном кольце образуют идеал.

Третье условие – алгебра функций на многообразии не должна содержать нильпотентов – тоже очевидно. Оказывается, что этих трёх условий достаточно.

Теорема 16. *Пусть A – ассоциативная коммутативная конечно порождённая алгебра над k без нильпотентов. Тогда $A \cong \mathsf{k}[X]$ для некоторого аффинного многообразия X над k.*

Идея доказательства такова. Рассмотрим сюръекцию $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \to A$, пусть I – её ядро, а X – множество нулей функций из идеала I. Тогда $A \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I$ и $\mathsf{k}[X] \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. При этом $I(X) \supset I$, и если выполняется равенство, то всё доказано. Почему оно выполнено, мы объясним позднее.

Как уже понятно, подмногообразия в заданном аффинном многообразии X соответствуют идеалам в $\mathsf{k}[X]$. Как именно, мы сейчас увидим.

Определим два отображения между множеством подмножеств (не обязательно алгебраических) в X и множеством идеалов в $\mathsf{k}[X]$. Сопоставим подмножеству Y идеал $I(Y) = \{f \in \mathsf{k}[X] \mid f|_Y = 0\}$, сопоставим идеалу I подмножество $V(I) = \{x \in X \mid \forall f \in I\ f(x) = 0\}$. Эти отображения не взаимно обратны, но, как мы увидим, они взаимно обратны на своих образах.

Следующие утверждения очевидно следуют из определений.

Предложение 17.

1. *$V(I(Y)) \supset Y$,*
2. *$I(V(I)) \supset I$,*
3. *$Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow I(Y_1) \supset I(Y_2)$,*
4. *$I_1 \subset I_2 \Rightarrow V(I_1) \supset V(I_2)$,*
5. *$I(V(I(Y))) = I(Y)$,*
6. *$V(I(V(I))) = V(I)$,*
7. *Операции V и I взаимно обратны на своих образах.*

8. *множества вида $V(I)$ – алгебраические подмногообразия.*

Таким образом, алгебраические подмногообразия однозначно соответствуют идеалам вида $I(Y)$, где $Y \subset X$ – некое подмножество. Такие идеалы описывает знаменитая

Теорема 18 (теорема Гильберта о нулях). *Если поле k алгебраически замкнуто, и $f \in \mathsf{k}[X]$ обращается в ноль на множестве нулей идеала I, то $f^N \in I$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$.*

Определение 19. *Радикалом* идеала $I \subset A$ в коммутативном кольце называется множество $r(I)$ элементов $a \in A$ таких, что $a^N \in I$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Идеал называется *радикальным*, если $r(I) = I$.

Следующие свойства несложно проверить:

Предложение 20.
1. *Радикал идеала – идеал,*
2. *$r(I) \supset I$,*
3. *$r(I_1 \cap I_2) = r(I_1) \cap r(I_2)$,*
4. *если I прост, то $r(I) = I$,*
5. *если I – пересечение простых, то $r(I) = I$.*

Таким образом, теорема Гильберта говорит, что $I(V(I))$ – радикал идеала I и что образ отображения I – радикальные идеалы. Получается

Следствие 21. *При $\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}}$ имеется взаимно-однозначное соответствие между аффинными алгебраическими подмногообразиями в аффинном многообразии X и радикальными идеалами в алгебре $\mathsf{k}[X]$.*

Приведём несколько геометрических свойств этого соответствия.

Предложение 22. *Для любых идеалов $I_1, I_2 \subset \mathsf{k}[X]$ и любых подмножеств $Y_1, Y_2 \subset X$ верно*

1. *$V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$,*
2. *$V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$,*
3. *$I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$,*
4. *$I(Y_1 \cap Y_2) = r(I(Y_1) + I(Y_2))$.*

Предложение 23. *Идеал $I(Y) \subset \mathsf{k}[X]$ прост титтк Y неприводимо.*

Доказательство. Y неприводимо $\Leftrightarrow$ $\mathsf{k}[Y] = \mathsf{k}[X]/I(Y)$ не имеет делителей нуля $\Leftrightarrow$ $I(Y)$ прост. □

Разложение многообразия на неприводимые компоненты соответствует представлению его идеала как пересечения простых. Тем самым, мы получили, что любой радикальный идеал представляется в виде пересечения попарно не вложенных простых идеалов.

Теперь определим проективные многообразия. Для этого нам понадобится проективное пространство.

Определение 24. *Проективным* n-мерным пространством $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ над полем k называется фактор множества ненулевых наборов $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathsf{k}^{n+1}$ по отношению эквивалентности: $(x_0, \ldots, x_n) \sim (tx_0, \ldots, tx_n)$, $t \neq 0$. Класс такого набора обозначается $(x_0 : \ldots : x_n)$ В инвариантном виде, *проективизация* $\mathbb{P}(V)$ векторного пространства V размерности $n+1$ – это множество прямых в V, проходящих через 0.

Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ покрывается аффинными пространствами, называемыми *картами.* Для $i = 0 \ldots n$ положим $U_i = \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$. Имеется биекция $\phi_i \colon U_i \leftrightarrow \mathbb{A}^n$, сопоставляющая (для $i = 0$) точке $(x_0 : \ldots : x_n) \in U_0$ точку $(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{A}^n$, а точке $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{A}^n$ точку $(1 : y_1 : \ldots : y_n) \in U_0$. Точки, не лежащие в данной карте, называются *бесконечно удалёнными* для неё. Нетрудно убедиться, что функции перехода

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} \colon \phi_i(U_0 \cap U_1) \to \phi_j(U_0 \cap U_1)$$

– регулярные изоморфизмы между открытыми подмножествами в $\mathbb{A}^n$. Т.е, можно считать, что проективное пространство склеено из аффинных многообразий.

Вычислить значение многочлена в точке проективного пространства нельзя. Однако для однородных многочленов имеет смысл говорить о том, равно ли нулю это значение. Дело в том, что для однородного многочлена $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ степени m верно $F(tx_0, \ldots, tx_n) = t^m F(x_0, \ldots, x_n)$. Поэтому он одновременно равен или не равен нулю во всех эквивалентных наборах координат.

Определение 25. *Алгебраическим подмножеством* проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\mathsf{k}}$ называется множество нулей некоторой (возможно, бесконечной) системы уравнений $F_\alpha(x_0 : \ldots : x_n) = 0$, где $F_\alpha \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены.

Также можно дать локальное определение.

Определение 26. Подмножество $X \subset \mathbb{P}^n$ называется *алгебраическим*, если пересечения $X \cap U_i$ – алгебраические подмножества в аффинных пространствах $\mathbb{A}^n$.

Так же, как и в аффинном случае, на алгебраических подмножествах вводится топология Зарисского – замкнутыми объявляются алгебраические подмножества.

Покажем, что определения 25 и 26 равносильны. Действительно, если X задано системой уравнений $F_\alpha = 0$, то $X \cap U_0$ задано системой уравнений $f_\alpha = 0$, где $f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) = F(1, y_1, \ldots, y_n)$, и потому алгебраично. Для рассуждения в другую сторону укажем способ переходить от аффинных многообразий и уравнений к проективным.

Определение 27. *Проективизацией*, или *проективным замыканием*, $\bar{X}$ аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^n \cong U_0 \subset \mathbb{P}^n$ называется его замыкание в топологии Зарисского в $\mathbb{P}^n$.

Как записать в координатах проективное замыкание? Если $f \in \mathsf{k}[y_1, \ldots, y_n]$ – многочлен, равный нулю на X, рассмотрим однородный многочлен $F(x_0, \ldots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0})$, где $d = \deg f$. Нули F в пересечении с U_0 совпадают с нулями f. Поэтому если X – множество нулей системы многочленов f_α, то замыкание X – нули системы многочленов F_α, полученных указанным способом.

Пусть теперь для множества $X \subset \mathbb{P}^n$ все пересечения $X \cap U_i$ алгебраичны. Тогда

$$X = \bigcap_i \left(\overline{X \cap U_i} \cup (\mathbb{P}^n \setminus U_i) \right)$$

и поэтому X алгебраично как пересечение алгебраичных.