Проективные многообразия

Напомним, что *проективным многообразием* называется подмножество в $\mathbb{P}^n$, заданное как множество нулей системы однородных многочленов от $n+1$ переменной. *Квазипроективным многообразием* называется открытое в топологии Зарисского подмножество проективного многообразия.

Определение 1. Функция $f\colon U \to \mathsf{k}$ на открытом подмножестве $U \subset X$ алгебраического подмножества проективного пространства называется *регулярной*, если при всех i ограничение $f|_{U \cap U_i}$ – регулярная функция на квазиаффинном многообразии $U \cap U_i$.

Как можно задавать регулярные функции?

Лемма 2. *Пусть $F, G \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены одинаковой степени, причём G не обращается в ноль на квазипроективном многообразии $X \subset \mathbb{P}^n$. Тогда частное F/G определяет регулярную функцию на X.*

Доказательство. Хотя значения $F(x)$ и $G(x)$ не определены для точки x проективного пространства, их частное корректно определено, оно не зависит от выбора однородных координат для точки. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим карту $U_i \ni x$. Тогда F/G примет вид f/g, где $f = F(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$ и $g = G(y_0, \ldots, 1, \ldots, y_n)$ – многочлены от аффинных координат y_j на U_i и g не обращается в 0 на $X \cap U_i$. Значит, F/G регулярна на $X \cap U_i$ по определению. $\square$

Определение 3. Отображение $\phi\colon X \to Y$ между квазипроективными многообразиями *регулярно*, если для любой точки $x \in X$ найдутся квазиаффинные окрестности $U \ni x$ и $V \ni \phi(x)$, такие что $\phi(U) \subset V$ и отображение $\phi|_U : U \to V$ регулярно (для квазиаффинных множеств это уже известно, что значит).

Как можно задавать регулярные отображения?

Лемма 4. *Пусть $\phi\colon X \to Y$ – отображение между квазипроективными многообразиями $X \subset \mathbb{P}^n$ и $Y \subset \mathbb{P}^m$. Пусть X покрывается открытыми множествами $U \subset X$ и для каждого из них существуют однородные многочлены $F_0, \ldots, F_m \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ одинаковой степени, не обращающиеся одновременно в ноль на U такие, что $\phi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_m(x))$ на U. Тогда отображение ϕ регулярно.*

Доказательство. Для любой точки $x \in X$ рассмотрим карты в $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^m$, содержащие x и $\phi(x)$ соответственно. Можно считать, не ограничивая общности, что это U_0 и U_0. Найдём окрестность $U \ni x$, как в условии. Тогда в качестве квазиаффинных окрестностей для x и $\phi(x)$ можно взять $U_0 \cap U \cap \{F_0 \neq 0\} \subset X$ и $U_0 \cap Y \subset Y$. На такой окрестности ϕ запишется как $(F_1/F_0, \ldots, F_m/F_0)$, где все частные F_i/F_0 – регулярные функции. Значит, ϕ регулярное отображение между квазиаффинными окрестностями. $\square$

Как не всегда можно задать регулярное отображение?

Неверно, что любое регулярное отображение $X \to \mathbb{P}^m$ имеет вид $(f_0 : \ldots : f_m)$, где f_i – регулярные функции на X. Потому, что регулярные функции, например, на проективном пространстве – константы.

Неверно, что любое регулярное отображение $X \to \mathbb{P}^m$ имеет вид $(F_0 : \ldots : F_m)$, где F_i – однородные многочлены на $X \subset \mathbb{P}^n$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример.

Пример 5. Пусть отображение $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ задано формулой

$$\phi(x_0 : x_1) = (x_0^2 : x_0x_1 : x_2^2).$$

Такое отображение называется двукратным вложением, его образ C – неособая коника. Оно регулярно по лемме 4 (где $U = \mathbb{P}^1$). Обратное отображение задаётся формулой $\phi^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = (y_0 : y_1)$ на подмножестве $\{y_0 \neq 0\} \subset C$ и формулой $\phi^{-1}(y_0 : y_1 : y_2) = (y_1 : y_2)$ на подмножестве $\{y_2 \neq 0\} \subset C$. Однако ни одна из этих формул не задаёт обратного отображения на всей кривой C, так как первая не определена в точке $(0 : 0 : 1) \in C$, а вторая – в точке $(1 : 0 : 0) \in C$.

Как показывает следующая лемма, при рассмотрении окрестностей в топологии Зарисского достаточно брать аффинные окрестности.

Лемма 6. *Любая точка квазипроективного многообразия имеет в нём аффинную окрестность.*

Доказательство. Если $x \in X \subset \mathbb{P}^n$ – точка, лежащая в карте U_i, то её окрестность $X \cap U_i$ квазиаффинна. Как мы знаем, любое открытое подмножество в аффинном многообразии Y есть объединение множеств вида $Y_f = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\} \subset Y$, где $f \in \mathsf{k}[Y]$. Поэтому достаточно показать, что такое Y_f изоморфно аффинному многообразию.

Пусть $Y \subset \mathbb{A}^n$ задано как множество нулей многочленов f_α. Рассмотрим аффинное многообразие $Y' \subset \mathbb{A}^{n+1}$, заданное системой уравнений $f_\alpha(y_1, \ldots, y_n) = 0$, $f(y_1, \ldots, y_n)y_{n+1} - 1 = 0$. Определим $\phi\colon Y' \to Y$ как проекцию на первые n координат. Несложно понять, что ϕ – изоморфизм между Y' и $Y_f \subset Y$. $\square$

Для алгебраических подмножеств проективного пространства регулярные функции уже не играют такой роли, как для аффинных многообразий – таких функций может очень мало. Так, как мы скоро увидим, на проективном пространстве над алгебраически замкнутым полем все регулярные функции – константы. Но, хотя многочлены из $\mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ и не являются функциями на $\mathbb{P}^n$, проективным многообразиям можно сопоставить алгебру, роль которой отчасти аналогична таковой для алгебры регулярных функций на аффинном многообразии.

Определение 7. Кольцо S *градуировано*, если задано разложение $S = \oplus_{i \geqslant 0} S_i$ в прямую сумму подгрупп по сложению, и $S_iS_j \subset S_{i+j}$. Гомоморфизм градуированных колец $S \to T$ *однороден*, если переводит S_i в T_i.

Заметим, что кольцо многочленов $S = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ градуированно: S_i состоит из однородных многочленов степени i. Скажем, что многочлен $f \in S = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ обращается в ноль в точке $x \in \mathbb{P}^n$, если все его однородные компоненты $f_i \in S_i$ равны нулю в x (для однородных многочленов мы уже понимаем, что это значит). Обозначим через $I(X) \subset S$ *идеал проективного многообразия* X – это множество таких многочленов, которые обращаются в ноль во всех точках X. Это действительно идеал, так же, как и в аффинном случае.

Определение 8. Идеал I градуированного кольца S называется *однородным* (или *градуированным*), если $I = \oplus I_i$, где $I_i \subset S_i$ – подгруппы по сложению. Эквивалентно, для любого элемента $f \in I$ все однородные компоненты $f_i \in I_i$ также лежат в I.

Справедлива очевидная

Лемма 9. *Если идеал $I \subset S$ в градуированном кольце однороден, то факторкольцо S/I естественным образом градуировано.*

По определению, идеал проективного многообразия однороден. Следовательно, факторкольцо $\mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]/I(X)$ для проективного многообразия – градуированное кольцо. Оно называется *однородным координатным кольцом* многообразия и обозначается $S(X)$.

Однородное координатное кольцо не является инвариантом многообразия – оно зависит от проективного вложения.

Пример 10. В примере 5 однородное координатное кольцо $S(C)$ коники C изоморфно $\mathsf{k}[y_0, y_1, y_2]/(y_0y_2 - y_1^2)$. Оно не изоморфно $\mathsf{k}[x_0, x_1]$, например, потому, что $S(C)_1 = \langle y_0, y_1, y_2 \rangle$ трёхмерно, а $(\mathsf{k}[x_0, x_1])_1$ двумерно.

Кроме того, не всегда можно регулярному отображению проективных многообразий сопоставить однородный гомоморфизм однородных координатных колец. Действительно, изоморфизму $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to C \subset \mathbb{P}^2$ из примера 5 отвечает гомоморфизм однородных координатных колец, переводящий y_0, y_1, y_2 в x_0^2, x_0x_1, x_1^2 соответственно. Он неоднороден, увеличивает градуировку в два раза и не сюръективен. Поэтому обратному отображению ϕ^{-1} нельзя сопоставить естественного гомоморфизма координатных колец.

Тем не менее, некоторые свойства двойственности между многообразиями и алгебрами функций имеют место и для проективных многообразий. Так, однородные идеалы в однородном координатном кольце проективного многообразия соответствуют его подмногообразиям.

Для однородного идеала $I \subset S = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ обозначим через $V(I) \subset \mathbb{P}^n$ множество нулей всех многочленов из I. Заметим, что это множество может быть пустым для нетривиального идеала: например, $V(I) = \emptyset$, если $I = S_{>0} = (x_0, \ldots, x_n)$ или $I = S_{\geqslant d} = (x_0, \ldots, x_n)^d$.

Для соответствий V и I между идеалами и подмножествами в проективном пространстве верны те же свойства, что и в аффинном случае. Имеет место

Теорема 11 (теорема Гильберта о нулях, проективный вариант). *Пусть $I \subset S = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородный идеал, а поле k алгебраически замкнуто. Тогда*

1. *Если I содержит идеал $S_{\geqslant d}$ для некоторого d, то $V(I) = \emptyset$,*
2. *Иначе $I(V(I)) = r(I)$ и $V(I) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Выведем эти утверждения из аффинного варианта теоремы о нулях.

Первая часть очевидна: I содержит все мономы x_i^d и поэтому $V(I)$ пусто.

Во втором случае рассмотрим $\bar{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ – множество нулей I в аффинном пространстве. Оно строго больше, чем точка $O = (0, \ldots, 0)$. В противном случае мы бы имели $r(I) = I(O) = (x_0, \ldots, x_n)$, это значит, что $x_i^N \in I$ для некоторого N. А тогда любой моном степени $d = N(n+1)$ лежит в I, противоречие. Легко видеть, что многочлен f обращается в ноль на $X = V(I) \subset \mathbb{P}^n$ титтк он обращается в ноль на $\bar{X}$, это равносильно $f \in r(I)$ по теореме Гильберта о нулях. $\square$

Заметим, что радикал однородного идеала – также однородный идеал.

Наконец, покажем, что регулярные функции на проективном многообразии локально постоянны.

Теорема 12. *Пусть X – проективное многообразие над k, Y – квазипроективное многообразие, а $\phi\colon X \to Y$ – регулярное отображение. Пусть k алгебраически замкнуто. Тогда образ $\phi(X)$ замкнут в Y (в топологии Зарисского).*

Доказательство. Рассмотрим график ϕ: это подмножество $\Gamma_\phi \subset X \times Y$, состоящее из пар вида $(x, \phi(x))$. Оно замкнуто: это достаточно проверить локально, а локально регулярное отображение записывается в виде $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где f_i – регулярные функции. Поэтому график задаётся уравнениями $y_i - f_i(x) = 0$, $i = 1 \ldots m$, значит он замкнут. Образ $\phi(X)$ есть образ Γ_ϕ при проекции на Y, поэтому достаточно доказать следующее: проекция $X \times Y$ на Y переводит замкнутые множества в замкнутые. Понятие замкнутости подмножества локально, поэтому (лемма 6) достаточно проверять утверждение для аффинных Y. Кроме того, вкладывая Y как замкнутое подмножество в аффинное пространство, можно считать, что $Y = \mathbb{A}^m$. А вкладывая X как замкнутое подмножество в проективное пространство, можно считать, что $X = \mathbb{P}^n$. Таким образом, надо показать, что проекция $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ на $\mathbb{A}^m$ переводит замкнутые множества в замкнутые.

Пусть $Z \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ – замкнутое подмножество, а $y = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{A}^m$ – точка. Она лежит в $p_2(Z)$ титтк её прообраз непуст. Замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ задаётся как нули семейства многочленов $F_i(x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ (можно считать, что их конечное число r), однородных по переменным x_j. Прообраз точки y непуст титтк однородные многочлены $F_i(x_j, a_1, \ldots, a_m)$ от переменных x_j задают непустое подмножество в $\mathbb{P}^n$. По теореме Гильберта о нулях это равносильно тому, что идеал I, порождённый многочленами F_i, не содержит идеалов $S_{\geqslant d}$ при всех d. Покажем, что для каждого d множество точек $y = (a_1, \ldots, a_m)$, для которых многочлены $F_i(x_j, a_1, \ldots, a_m)$ порождают идеал, не содержащий $S_{\geqslant d}$, замкнуто. Тогда образ Z будет замкнут как пересечение счётного числа замкнутых множеств.

Пусть $\deg F_i = c_i$. Несложно понять: идеал $(F_i(x_j, a_1, \ldots, a_m)) \subset S$ не содержит S_d титтк отображение

$$S_{d-c_1} \times \ldots \times S_{d-c_r} \to S_d : \quad (H_1, \ldots, H_r) \mapsto \sum_i F_i(x, a) H_i(x)$$

не сюръективно. Указанное отображение записывается матрицей, коэффициенты которой – многочлены от a. Оно не сюръективно титтк ранг матрицы меньше $\dim S_d$, это условие равносильно обнулению всех миноров матрицы порядка $\dim S_d$, т.е. системе полиномиальных уравнений от y_i. Таким образом, множество замкнуто. □

Следствие 13. *Пусть f – регулярная функция на связном проективном многообразии X над $\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}}$. Тогда f постоянна.*

Доказательство. Рассмотрим f как регулярное отображение $X \to \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$. По предыдущей теореме, его образ замкнут. Замкнутые подмножества в $\mathbb{P}^1$ – это всё $\mathbb{P}^1$ и конечные наборы точек. Образ X не равен $\mathbb{P}^1$ так, как не содержит точки $\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{A}^1$. Значит, он состоит из конечного числа точек. Их прообразы – открыто-замкнутые подмножества в X. Так как X связно, точка только одна, т.е. f постоянна. □