Рациональные функции и отображения

Сегодня все многообразия предполагаются неприводимыми.

Напомним, алгебраическое многообразие неприводимо, если его нельзя представить в виде объединения двух нетривиальных замкнутых по Зарисскому подмножеств. Эквивалентным образом можно сказать, что многообразие неприводимо, если любые два его непустые открытые подмножества пересекаются.

Лемма 1. *Пусть многообразие X неприводимо, $U \subset X$ – непустое открытое по Зарисскому подмножество, а $f_1, f_2 \in \mathsf{k}[X]$ – функции, совпадающие на U. Тогда $f_1 = f_2$ на X.*

Доказательство. Рассмотрим два открытых подмножества: U и $U' = \{x \mid f_1(x) - f_2(x) \neq 0\}$. Они не пересекаются, U непусто, значит U' пусто. □

Определение 2. *Рациональной функцией* на (квазипроективном) неприводимом многообразии X называется класс эквивалентности пар (U, f), где $U \subset X$ – непустое открытое подмножество, а $f \in \mathsf{k}[U]$ – регулярная функция, по следующему отношению. Пары (U, f) и (U', f') эквивалентны, если на некотором непустом открытом подмножестве $U'' \subset U \cap U'$ функции f_1 и f_2 совпадают.

Замечание 3. В данном определении можно сказать «на пересечении $U \cap U'$ функции f_1 и f_2 совпадают». Действительно, $U \cap U'$ неприводимо, и если две регулярные функции равны на открытом подмножестве в $U \cap U'$, то они равны и на всём $U \cap U'$ по лемме 1.

Рациональная функция не является функцией в смысле теории множеств, но является частично определённой функцией.

Определение 4. Рациональная функция (U, f) на X *определена* в точке $x \in X$, если найдётся пара (U', f'), эквивалентная (U, f), что $x \in U'$. Число $f'(x)$ при этом называется *значением* рациональной функции в точке x. Множество точек, в которых определена рациональная функция, называется её *областью определения.*

Замечание 5. Легко видеть, что значение рациональной функции в точке, где функция определена, не зависит от выбора пары, это прямо следует из замечания 3. Кроме того, область определения рациональной функции – открытое множество как объединение открытых.

Рациональные функции на неприводимом многообразии можно складывать и умножать.

Определение 6. *Суммой* рациональных функций (U_1, f_1) и (U_2, f_2) называется рациональная функция $(U_1 \cap U_2, f_1 + f_2)$, аналогично определяется произведение.

Нетрудно убедиться, что данное определение корректно, сумма не зависит от выбора пары. Заметим также, что для приводимых многообразий сумма может не существовать. Поэтому рациональные функции рассматривают только для неприводимых многообразий.

Пример 7. Пусть $X \subset \mathbb{A}^2$ – пара прямых, заданная уравнением $xy = 0$. Тогда $1/x$ и $1/y$ – рациональные функции на X, сумма которых нигде не определена.

Кроме того, рациональные функции можно делить друг на друга. Действительно, если $f \not\equiv 0$, то обратной к функции (U, f) будет $(U \cap \{f \neq 0\}, 1/f)$.

Таким образом, множество рациональных функций на неприводимом многообразии X над k образует поле, которое обозначается $\mathsf{k}(X)$. Это – важный инвариант многообразий, хотя и более грубый, чем алгебра функций для аффинных многообразий.

Предложение 8. *Пусть $Y \subset X$ – непустое открытое подмножество в неприводимом многообразии. Тогда $\mathsf{k}(Y) \cong \mathsf{k}(X)$.*

Доказательство. Установим биекцию. Пара (U, f), задающая рациональную функцию на Y, задаёт рациональную функцию и на X. Обратно, рациональной функции (U, f) на X (где $U \subset X$) соответствует пара $(U \cap Y, f|_{U\cap Y})$, задающая рациональную функцию на Y. ☐

Поэтому по сути достаточно изучать поля рациональных функций для аффинных многообразий – в любом квазипроективном многообразии есть аффинное открытое подмножество.

Предложение 9. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ – квазиаффинное неприводимое многообразие. Тогда $\mathsf{k}(X)$ – поле частных кольца $\mathsf{k}[X]$.*

Доказательство. Любая регулярная функция на подмножестве $U \subset X$ по определению есть отношение многочленов, а каждый многочлен задаёт регулярную функцию на X, получаем элемент поля частных $\mathsf{k}[X]$. Наоборот, любая дробь f/g, где $f, g \in \mathsf{k}[X]$ и $g \not\equiv 0$ на X задаёт рациональную функцию $(\{x \in X \mid g(x) \neq 0\}, f/g)$. ☐

Поэтому рациональные функции и называются *рациональными*, т.е. *дробными*.

Следствие 10. $\mathsf{k}(\mathbb{A}^n) \cong \mathsf{k}(\mathbb{P}^n) \cong \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. $\mathsf{k}(\mathbb{A}^n)$ – поле частных кольца $\mathsf{k}[\mathbb{A}^n] \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, т.е. поле рациональных функций от n переменных. ☐

Несложно убедиться и в следующем:

Предложение 11. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – квазипроективное неприводимое многообразие. Тогда $\mathsf{k}(X)$ – множество функций вида F/G, где $F, G \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены одинаковой степени и G не обращается в ноль тождественно на X.*

Видно, что задать рациональную функцию на многообразии проще, чем регулярную.

Можно ли по регулярному отображению многообразий определить отображение на рациональных функциях в обратную сторону? Не всегда. Например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, $\phi(x) \equiv 0$ – отображение, а $1/x \in \mathsf{k}(Y)$, то композиция $f \circ \phi$ не определена. Однако отображение на рациональных функциях возникает, если отображение многообразий доминантно.

Предложение 12. *Пусть $\phi\colon X \to Y$ – регулярное доминантное отображение. Тогда корректно определён гомоморфизм полей функций $\phi^*\colon \mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X)$.*

Доказательство. Сопоставим функции $(U, f) \in \mathsf{k}(Y)$ функцию $(\phi^{-1}(U), f \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)})$. Множество $\phi^{-1}(U)$ открыто и непусто, иначе $\operatorname{im} X$ лежит в замкнутом множестве $Y \setminus U$ и поэтому не плотен, что противоречит доминантности. Ясно, что это сопоставление корректно определено и сохраняет арифметические операции. ☐

Верно ли обратное: всякий гомоморфизм полей функций происходит из некоторого регулярного отображения многообразий? Нет, не всегда. Отображения между многообразиями тоже должны быть рациональными.

Определение 13. *Рациональным отображением* между (квазипроективными) неприводимыми многообразиями $X \to Y$ называется класс эквивалентности пар (U, ϕ), где $U \subset X$ – непустое открытое подмножество, а $\phi\colon U \to Y$ – регулярное отображение, по следующему отношению. Пары (U, ϕ) и (U', ϕ') эквивалентны, если на некотором непустом открытом подмножестве $U'' \subset U \cap U'$ (а значит, и на всём пересечении $U \cap U'$) отображения ϕ и ϕ' совпадают. Рациональные отображения обозначают пунктирными стрелками: $X \dashrightarrow Y$.

Так же, как и для функций, можно говорить о том, что рациональное отображение определено в той или иной точке, о его области определения.

Как записывать рациональные отображения?

Предложение 14. *Пусть X и Y – многообразия, X неприводимо, $Y \subset \mathbb{A}^m$ квазиаффинно. Задать рациональное отображение из X в Y – всё равно, что задать m рациональных функций $f_1, \dots, f_m$ на X таких, что на некотором непустом открытом множестве $U \subset X$ верно $(f_1, \dots, f_m)(x) \in Y$.*

Доказательство. Если рациональное отображение задано парой (U, ϕ), то композиции ϕ с координатными функциями $x_1, \dots, x_m$ на Y дают рациональные функции $(U, f_i) \in \mathsf{k}(X)$ и на U точка $(f_1, \dots, f_m)(x)$ лежит в Y.

Обратно, если даны m рациональных функций $(U_1, f_1), \dots, (U_m, f_m)$ на X таких, что на некотором открытом множестве $U \subset \cap U_i$ верно $(f_1, \dots, f_m)(x) \in Y$, определим отображение $X \dashrightarrow Y$ парой (U, ϕ), где $\phi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ для $x \in U$. ☐

Несложно убедиться и в следующем.

Предложение 15. *Пусть X и Y – многообразия, X неприводимо, $Y \subset \mathbb{P}^m$ квазипроективно. Задать рациональное отображение из X в Y – всё равно, что задать $m+1$ рациональных функций $f_0, \dots, f_m$ на X, не все из которых равны нулю тождественно, и таких, что на некотором непустом открытом множестве $U \subset X$ верно $(f_0 : \dots : f_m)(x) \in Y$.*

Предложение 16. *Пусть X и Y – многообразия, X неприводимо, $X \subset \mathbb{P}^n, Y \subset \mathbb{P}^m$ квазипроективны. Задать рациональное отображение из X в Y – всё равно, что задать $m+1$ форм $F_0, \dots, F_m \in \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$ одинаковой степени, не все из которых равны нулю тождественно на X, и таких, что на некотором непустом открытом множестве $U \subset X$ верно $(F_0 : \dots : F_m)(x) \in Y$.*

Когда можно брать композицию рациональных отображений?

Предложение 17. *Если $X \dashrightarrow Y$ и $Y \dashrightarrow Z$ – рациональные отображения, первое из которых доминантно, то корректно определена их композиция.*

Доказательство. Пусть отображения заданы парами (U, ϕ) и (V, ψ), где $U \subset X, V \subset Y$. В качестве композиции возьмём $(\phi^{-1}(V), \psi \circ \phi|_{\phi^{-1}(V)})$. Множество $\phi^{-1}(V)$ непусто так, как ϕ доминантно. ☐

Следствие 18. *Если $\phi\colon X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение, то определён гомоморфизм полей $\phi^*\colon \mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X)$.*

Определение 19. Многообразия называются *бирационально изоморфными*, если между ними существуют взаимно обратные рациональные отображения.

Определение 20. Многообразие, бирационально изоморфное аффинному пространству, называется *рациональным.*

Пример 21.
1. Любое неприводимое многообразие бирационально изоморфно любому своему непустому открытому подмножеству.
2. $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{P}^n$, $(\mathbb{P}^1)^n$, $\mathbb{A}^n \setminus O$, ... бирационально изоморфны друг другу.
3. Неприводимая квадрика (гиперповерхность второй степени) рациональна (см. листок 2).

Теперь научимся по гомоморфизму полей функций восстанавливать отображение многообразий.

Предложение 22. *Пусть X, Y – неприводимые многообразия над полем k, а $s\colon \mathsf{k}(Y) \to \mathsf{k}(X)$ – гомоморфизм полей. Тогда существует единственное рациональное отображение $\phi\colon X \dashrightarrow Y$ такое, что $s = \phi^*$.*

Доказательство. Выберем открытое аффинное подмножество $V \subset Y$, тогда $\mathsf{k}(V) = \mathsf{k}(Y)$. Пусть $V \subset \mathbb{A}^m$, тогда координатные функции $\bar{y}_i$, $i = 1 \ldots m$, порождают алгебру $\mathsf{k}[V]$ и поле $\mathsf{k}(V)$ над k. Рассмотрим рациональное отображение $\phi\colon X \dashrightarrow \mathbb{A}^m$, заданное набором рациональных функций $(s(\bar{y}_1), \ldots, s(\bar{y}_m))$. В точках x, где все они определены, $\phi(x) \in V$. Действительно, если $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_m]$ – один из многочленов, определяющих V, то $f(\phi) = f(s(\bar{y}_1), \ldots, s(\bar{y}_m)) = s(f(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m) = s(0) = 0$, поэтому образ ϕ лежит в V. Ясно, что $\phi^* = s$ на функциях $\bar{y}_i$, а значит, и на всём поле $\mathsf{k}(Y)$. Композиция построенного ϕ с вложением V в Y даёт искомое отображение. ☐

Следствие 23. *Если X и Y – неприводимые многообразия и $\mathsf{k}(X) \cong \mathsf{k}(Y)$, то X и Y бирационально изоморфны.*

Таким образом, исследование многообразий с точностью до бирационального изоморфизма состоит в исследовании их полей функций. Так, рациональные многообразия – это многообразия, поле функций которых изоморфно полю рациональных функций от нескольких переменных. Какие же поля могут быть полем функций на многообразии?

Предложение 24. *Поле K, содержащее алгебраически замкнутое поле k, является полем рациональных функций на неприводимом многообразии X над k титтк K порождено над k конечным числом элементов.*

Доказательство. Если K – поле функций на X, то X можно выбрать аффинным (взять любое аффинное открытое подмножество). Тогда K – поле частных кольца $\mathsf{k}[X]$, которое конечно порождено над k как алгебра. Те же элементы порождают K как k поле.

Обратно, пусть K порождено над k элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Рассмотрим подалгебру $A = \mathsf{k}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \subset K$, порождённую этими элементами в K. Она конечно порождена, не содержит нильпотентов и делителей нуля. Значит, как мы видели, она изоморфна алгебре регулярных функций на некотором аффинном многообразии X над k. При этом K – поле частных A, поэтому $K \cong \mathsf{k}(X)$. ☐

Таким образом, нам интересны конечно порождённые расширения основного поля k. Как правило, он имеют бесконечную размерность как векторные пространства, однако им тоже можно сопоставить естественный численный инвариант – степень трансцендентности.

Определение 25. Пусть $\mathsf{k} \subset K$ – расширение полей. Элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ *алгебраически независимы* над k, если они не удовлетворяют никакому соотношению $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, где $f \in \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ – ненулевой многочлен. В частности, один элемент алгебраически независим титтк он трансцендентен (т.е., не алгебраичен).

Отметим, что подполе $\mathsf{k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset K$, порождённое алгебраически независимыми элементами, изоморфно полю рациональных функций от n переменных.

Определение 26. Расширение полей $\mathsf{k} \subset K$, где K изоморфно полю рациональных функций от нескольких переменных над k, называется *чисто трансцендентным.*

Определение 27. *Базисом трансцендентности* расширения $\mathsf{k} \subset K$ называется максимальный по вложению набор алгебраически независимых над k элементов.

Лемма 28. *Набор алгебраически независимых элементов $\alpha_i \in K$ – базис трансцендентности над k титтк расширение $\mathsf{k}(\alpha_1, \dots) \subset K$ алгебраично.*

Доказательство. Пусть набор α_i максимален, а $\alpha \in K$ – ещё один элемент. Тогда набор из α_i и α алгебраически зависим, т.е. есть полиномиальное соотношение $f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = 0$. В него α входит нетривиально, т.к. α_i были алгебраически независимы. Значит, α алгебраичен над $\mathsf{k}(\alpha_1, \dots)$.

Если же расширение $\mathsf{k}(\alpha_1, \dots) \subset K$ алгебраично, то для любого элемента $\alpha \in K$ имеем полиномиальное соотношение $f(\alpha) = 0$, где коэффициенты f лежат в поле $\mathsf{k}(\alpha_1, \dots)$. Домножая f на общий знаменатель его коэффициентов, получаем, что элементы $\alpha, \alpha_1, \dots$ уже алгебраически зависимы. □

Предложение 29. *1. У любого расширения полей есть базис трансцендентности.*

2. Пусть K/k – расширение полей, порождённое элементами $x_1, \dots, x_n$. Тогда в нём существует базис трансцендентности вида $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$.

Доказательство. Докажем 2. Будем выбирать элементы из x_i по очереди. Если несколько алгебраически независимых элементов $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ уже выбрано, смотрим, есть ли среди оставшихся x-ов неалгебраический над полем $K_r = \mathsf{k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$. Если есть, выбираем его, тогда новый набор $x_{i_1}, \dots, x_{i_{r+1}}$ тоже алгебраически независим. Если нет, то K порождено над K_r алгебраическими элементами и потому алгебраично. Значит, выбранные элементы образуют базис трансцендентности.

Утверждение 1 (где расширение не обязательно конечно порождено) доказывается аналогично с применением трансфинитной индукции. □

Замечание 30. 1. Как мы видим, любое расширение полей $\mathsf{k} \subset K$ раскладывается в башню $\mathsf{k} \subset F \subset K$, где $\mathsf{k} \subset F$ чисто трансцендентно, а $F \subset K$ алгебраично. Такое разложение почти никогда не единственно. Например, чисто трансцендентное расширение $\mathsf{k} \subset \mathsf{k}(x)$ допускает также разложение в башню $\mathsf{k} \subset \mathsf{k}(f(x)) \subset \mathsf{k}(x)$, обладающую указанным свойством, где $f(x)$ – любой непостоянный многочлен.

2. В то же время, не всякое расширение $\mathsf{k} \subset K$ раскладывается в башню $\mathsf{k} \subset F \subset K$, где $\mathsf{k} \subset F$ алгебраично, а $F \subset K$ чисто трансцендентно. Например, таково расширение $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(X)$, где X – неособая кубическая кривая в $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

Лемма 31. *Пусть K/k – расширение полей.*

1. *Число элементов в (конечном) базисе трансцендентности K/k не зависит от выбора базиса.*

2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in K$ – элементы такие, что расширение $\mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n) \subset K$ алгебраично, а y_j алгебраически независимы над k. Тогда $m \leqslant n$.*

Доказательство. 1 следует из 2, докажем 2.

Будем заменять некоторые x-ы на y-и так, чтобы расширение $K/\mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)$ было алгебраично. Если первыми закончатся y-и, то всё доказано. Если первыми закончатся x-ы, то получится, что оставшиеся y-и алгебраичны над подполем, порождённом выбранными y-ами, что противоречит условию. Итак, пусть остались и x-ы и y-и, сделаем еще одну замену.

Пусть уже заменены (с точностью до обозначений) $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_k$. Посмотрим на y_{k+1}, он алгебраичен над $\mathsf{k}(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Рассмотрим соотношение

$$f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, y_{k+1}) = 0$$

(можно считать, умножая на знаменатели, что f – многочлен). Многочлен f зависит хотя бы от одной переменной x – иначе y-и алгебраически зависимы. Пусть это (с точностью до обозначений) x_{k+1}. Значит, x_{k+1} алгебраичен над $\mathsf{k}(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$. Поэтому в башне расширений $K \supset \mathsf{k}(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) \supset \mathsf{k}(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ каждый этаж алгебраичен и потому она алгебраична, т.е. условие на новый набор x-ов снова выполнено. $\square$

Определение 32. *Степенью трансцендентности* расширения полей K/k называется число элементов в любом базисе трансцендентности K/k. Обозначение: $\operatorname{degtr} K/\mathsf{k}$. *Размерностью* неприводимого алгебраического многообразия X над k назовём степень трансцендентности поля $\mathsf{k}(X)$ над k.

Это определение размерности отличается от того, что было дано на первой лекции. Скоро мы увидим, как они связаны.

Пример 33. Имеем $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$. Действительно, базисом трансцендентности $\mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)$ над k может служить набор $x_1, \ldots, x_n$.

Следствие 34. *1.* $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{A}^m \Leftrightarrow n = m$,

2. $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}^m \Leftrightarrow n = m$,

3. $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_m] \Leftrightarrow n = m$,

4. $\mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n) \cong \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_m) \Leftrightarrow n = m$.