Размерность

Напомним, что размерностью неприводимого алгебраического многообразия X называется степень трансцендентности поля рациональных функций $\mathsf{k}(X)$ над k. Размерностью приводимого многообразия называется максимум размерностей его неприводимых компонент. Для простоты в дальнейшем сегодня все многообразия предполагаются неприводимыми, а основное поле – алгебраически замкнутым.

Предложение 1. *1. Если $X \subset Y$ – подмногообразие, то $\dim X \leqslant \dim Y$.*

2. Если $U \subset X$ – открытое подмножество, то $\dim U = \dim X$.

3. Если $V \subset X$ – собственное замкнутое подмножество, то $\dim V < \dim X$.

4. Если $\dim X = 0$, то X – точка.

5. Если $X_f \subset \mathbb{A}^n$ – множество нулей неприводимого многочлена $f \in \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, то $\dim X_f = n - 1$.

Доказательство. 1. Пусть $\dim Y = n$, и $f_1, \ldots, f_n \in \mathsf{k}(Y)$ – базис трансцендентности. Продолжим каждую из рациональных функций f_i до некоторой рациональной функции g_i на X. Тогда $g_1, \ldots, g_n$ алгебраически независимы. Действительно, если есть полиномиальное соотношение $F(g_1, \ldots, g_n) = 0$, то ограничивая его на Y, мы получим, что $f_1, \ldots, f_n$ алгебраически зависимы, противоречие. Значит, в поле $\mathsf{k}(X)$ есть n алгебраически независимых элементов и поэтому $\dim X \geqslant n$.

2. Для открытого $U \subset X$ имеем $\mathsf{k}(U) \cong \mathsf{k}(X)$, поэтому $\dim U = \dim X$.

3. Переходя к открытому подмножеству, можно считать, что X аффинно. Как в 1, найдём $f_1, \ldots, f_n \in \mathsf{k}(V)$ – базис трансцендентности. Продолжим каждую f_i до некоторой рациональной функции g_i на X. Возьмём $g_0 \neq 0$ – регулярную на X функцию, равную 0 на V. Тогда функции $g_0, g_1, \ldots, g_n \in \mathsf{k}(X)$ алгебраически независимы. Действительно, пусть $F(g_0, g_1, \ldots, g_n) = 0$ – полиномиальное соотношение, причём можно считать, что многочлен F неприводим. Разложим F по степеням g_0, получим $F = \sum g_0^i F_i(g_1, \ldots, g_n)$. Ограничивая на V, получим $F_0(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Так как f_i алгебраически независимы, то $F_0 \equiv 0$. Противоречие с неприводимостью F. Значит, $g_0, g_1, \ldots, g_n$ алгебраически независимы и $\dim X \geqslant \dim V + 1$.

4. Очевидно: если $\mathsf{k}(X)$ алгебраично над k (которое алгебраически замкнуто), то $\mathsf{k}(X) = \mathsf{k}$ и потому X – точка.

5. Уже известно, что $\dim X_f \leqslant n - 1$. Покажем, что в $\mathsf{k}(X_f)$ есть $n - 1$ алгебраически независимый элемент. Пусть многочлен f нетривиально зависит от переменной x_1. Тогда $x_2, \ldots, x_n$ алгебраически независимы в $\mathsf{k}(X_f)$. Пусть имеется соотношение $g(x_2, \ldots, x_n) = 0$ на X_f. Тогда по теореме Гильберта о нулях $g^N \vdots f$ при некотором N, а так как f неприводим, то $g \vdots f$. Но это невозможно, потому что f содержит переменную x_1, а g – нет. $\square$

Основная наша цель сегодня – показать, что определение размерности через степень трансцендентности поля функций совпадает с тем, которое было дано на первой лекции:

Определение 2. Размерностью алгебраического многообразия X называется максимальное n, для которого существует цепочка $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X$ различных замкнутых неприводимых подмногообразий.

На сегодняшней лекции будем обозначать величину, определённую выше, через $\dim_{Kr} X$ – размерность Крулля, а через $\dim X$ будем обозначать степень трансцендентности поля рациональных функций на X.

Несложно видеть, что $\dim_{Kr} X \leqslant \dim X$: если есть максимальная по длине цепочка $X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X$ различных замкнутых неприводимых подмногообразий, то по предложению 1.3 $\dim X_{n-1} \leqslant \dim X - 1$, $\dim X_{n-2} \leqslant \dim X_{n-1} - 1 \leqslant \dim X - 2$ и т.д. Получаем, что $\dim X \geqslant \dim X_0 + n \geqslant n = \dim_{Kr} X$.

Сложнее доказать обратное неравенство. Однако уже сейчас получается

Следствие 3. $\dim_{Kr} \mathbb{A}^n = n$.

Доказательство. Имеем $\dim_{Kr} \mathbb{A}^n \leqslant \dim \mathbb{A}^n = n$. С другой стороны, имеется цепочка алгебраических подмножеств $\mathbb{A}^0 \subset \mathbb{A}^1 \subset \ldots \subset \mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$, поэтому $\dim_{Kr} \mathbb{A}^n \geqslant n$. □

Неравенство $\dim_{Kr} \geqslant \dim$ вытекает из следующего утверждения:

Лемма 4. *Пусть X – квазипроективное многообразие. Тогда найдётся неприводимое замкнутое подмногообразие $X' \subset X$, что $\dim X' = \dim X - 1$.*

Действительно, пользуясь леммой, мы легко в многообразии X найдём цепочку вложенных замкнутых подмножеств длины $\dim X$.

Следующий факт очень важен и сам по себе, нам же он пригодится, чтобы доказать лемму.

Предложение 5. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое проективное подмногообразие размерности $m > 0$. Тогда для любого однородного многочлена $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$, не равного 0 на X, размерность (возможно, приводимого) многообразия $X_F = \{x \in X \mid F(x) = 0\}$ равна в точности $m - 1$.*

Доказательство леммы 4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – квазипроективное многообразие размерности m. Это значит, что $X = Y \setminus W$, где $W \subset Y \subset \mathbb{P}^n$ – замкнутые подмножества, $\dim Y = m$. Для каждой из неприводимых компонент W размерность $\leqslant m - 1$ по предложению 1. Найдём $Z \subset Y$ – неприводимую компоненту размерности $m - 1$ в Y_F для некоторого однородного многочлена F при помощи предложения 5. Тогда $X \cap Z = Z \setminus (Z \cap W)$ – открытое подмножество в Z, его размерность $m - 1$, если оно непусто. При этом $X \cap Z$ замкнуто в X, так что лемма доказана, если $Z \not\subset W$. Если же $Z \subset W$, то Z – одна из компонент в W из-за равенства размерностей, это значит, что F равно нулю на некоторой из неприводимых компонент W. Однако несложно выбрать такой многочлен F, который не равен нулю тождественно на каждой из компонент W. □

Доказательство предложения 5. Пусть все неприводимые компоненты X_F имеют размерность $\leqslant m - 2$. Тогда можно найти однородные многочлены $F = F_1, F_2, \ldots, F_m$ такие, что $X_{F_1} \cap X_{F_2} \cap \ldots \cap X_{F_m} = \emptyset$. Действительно, возьмём в качестве F_2 такой однородный многочлен, который не обращается в ноль на каждой из компонент X_{F_1}, тогда $\dim(X_{F_1} \cap X_{F_2}) \leqslant m - 3$. Далее, возьмём в качестве F_3 такой многочлен, который не обращается в ноль на каждой из компонент $X_{F_1} \cap X_{F_2}$, тогда $\dim(X_{F_1} \cap X_{F_2} \cap X_{F_3}) \leqslant m - 4$, и т.д. Можно считать, что все многочлены F_i одинаковой степени d – если нужно, можно каждый из них возвести в подходящую степень.

Рассмотрим рациональное отображение $\phi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$:

$$\phi(x) = (F_1(x) : \ldots : F_m(x)).$$

Так как F_i не обращаются одновременно в ноль на X, отображение ϕ регулярно. Обозначим через $Z \subset \mathbb{P}^{m-1}$ образ ϕ. Очевидно, что $\dim Z \leqslant m-1 < \dim X$. Мы покажем, однако, что расширение полей $\phi^*\colon \mathsf{k}(Z) \to \mathsf{k}(X)$ алгебраично, следовательно $\operatorname{degtr} \mathsf{k}(Z)/\mathsf{k} = \operatorname{degtr} \mathsf{k}(X)/\mathsf{k}$ и потому $\dim Z = \dim X$ – противоречие.

Поле $\mathsf{k}(X)$ порождено функциями $x_i/x_j = x_i^d/x_j x_i^{d-1} = x_i^d/F_1 : x_j x_i^{d-1}/F_1$, и значит, порождено функциями вида G/F_1, где G – однородный многочлен степени d. Покажем, что такие функции алгебраичны над $\mathsf{k}(Z)$, а значит, и всё расширение $\mathsf{k}(X)/\mathsf{k}(Z)$ алгебраично.

Пусть $\bar{X} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ – аффинный конус над X. Рассмотрим регулярные отображения $\psi\colon X \to \mathbb{P}^m$ и $\bar{\psi}\colon \bar{X} \to \mathbb{A}^{m+1}$:

$$\psi(x) = (G(x) : F_1(x) : \ldots : F_m(x)), \quad \bar{\psi}(x) = (G(x), F_1(x), \ldots, F_m(x)).$$

Образ ψ в $\mathbb{P}^m$ замкнут, поэтому он задаётся однородными уравнениями $f_i(y_0, \ldots, y_m) = 0$. Эти же уравнения задают образ $\bar{\psi}$ в $\mathbb{A}^{m+1}$. Точки вида $(t, 0, \ldots, 0)$ не лежат в $\bar{\psi}(X)$ при $t \neq 0$, поэтому система уравнений $f_i(y_0, \ldots, y_m) = y_1 = \ldots = y_m = 0$ имеет единственное решение $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^{m+1}$. Т.е., функция y_0 равна 0 на множестве решений этой системы. По теореме Гильберта о нулях имеем

$$y_0^N = \sum_i f_i(y_0, \ldots, y_m) p_i(y_0, \ldots, y_m) + \sum_{j=1}^m y_j q_j(y_0, \ldots, y_m)$$

при некотором натуральном N и многочленах p_i, q_j. Подставим в это равенство $\bar{\psi}(x)$, получим

$$G^N = \sum_{j=1}^m F_j q_j(G, F_1, \ldots, F_m).$$

Переходя к однородной компоненте степени dN, можно считать, что многочлены q_j однородны. Поделив на F_1^N, получим

$$(G/F_1)^N = \sum_{j=1}^m F_j/F_1 \cdot q(G/F_1, 1, F_2/F_1, \ldots, F_m/F_1).$$

Рассматривая это равенство как полиномиальное соотношение на G/F_1 с коэффициентами в $\mathsf{k}[F_2/F_1, \ldots, F_m/F_1] \subset \phi^*\mathsf{k}(Z)$, получаем, что G/F_1 алгебраична над $\mathsf{k}(Z)$, ч.т.д. $\square$

Следствие 6. *Пусть $F_1, \ldots, F_m \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ – однородные многочлены, а $X_{F_i} = \{x \in \mathbb{P}^n \mid F_i(x) = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ – гиперповерхности. Тогда пересечение $\cap X_{F_i}$ имеет размерность $\geqslant n-m$. В частности, при $m \leqslant n$ пересечение непусто.*

Сформулируем без доказательства следующие факты:

1. Если $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ – замкнутые подмножества и $\dim X + \dim Y \geqslant n$, то $X \cap Y$ непусто (мы доказали это для тех Y, которые задаются как множество нулей $n - \dim Y$ многочленов).

2. Если $X \subset \mathbb{A}^n$ (или $\mathbb{P}^n$) и $X_F \subset X$ – множество нулей некоторой ненулевой регулярной функции (однородного многочлена) F, то все неприводимые компоненты X_F имеют размерность $\dim X - 1$.

Наконец, докажем, что любое многообразие бирационально гиперповерхности.

Предложение 7. *Пусть X – неприводимое квазипроективное многообразие над полем характеристики ноль. Тогда X бирационально изоморфно множеству нулей $X_f \subset \mathbb{A}^{n+1}$ некоторого неприводимого многочлена $f \in \mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]$.*

Доказательство. Расширение $\mathsf{k}(X)/\mathsf{k}$ конечно порождено, выберем базис трансцендентности $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{k}(X)$. Расширение $\mathsf{k}(X) \supset \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)$ конечно порождено и алгебраично, следовательно, конечно. По лемме о примитивном элементе оно порождено одним элементом x_0. Пусть $f \in \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_n)[t_0]$ – его минимальный многочлен. Приводя к общему знаменателю и вынося общие множители, можно считать, что $f \in \mathsf{k}[t_0, t_1, \ldots, t_n]$ и неприводим в кольце многочленов от $n+1$ переменных. Легко видеть, что все полиномиальные соотношения на $x_i \in \mathsf{k}(X)$ делятся на f. Поэтому подалгебра $\mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n] \subset \mathsf{k}(X)$ изоморфна $\mathsf{k}[t_0, \ldots, t_n]/f \cong \mathsf{k}[X_f]$ и $\mathsf{k}(X)$ есть поле частных $\mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]$, что изоморфно $\mathsf{k}(X_f)$. Изоморфизм полей рациональных функций $\mathsf{k}(X) \cong \mathsf{k}(X_f)$ влечёт бирациональный изоморфизм $X \cong X_f$. $\square$