Категории и функторы

Теория категорий почти не содержит теорем, но её язык чрезвычайно удобен и позволяет компактно формулировать и эффективно доказывать различные утверждения.

Если между объектами некоторого типа есть хорошо определённые морфизмы, то такие объекты образуют категорию. По определению, *категория* $\mathcal{C}$ состоит из:

- класса объектов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ для любых объектов $A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- закона композиции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) : (f,g) \mapsto f \circ g$,

при этом должны быть выполнены свойства:

1. ассоциативность композиции: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (если композиции имеют смысл);
2. существование тождественного эндоморфизма для любого объекта A: такого $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$, что $1_A \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$ (тогда, когда композиция имеет смысл).

Примеры категорий:

1. категория множеств $\mathcal{S}ets$: объекты – множества, морфизмы – отображения между множествами;
2. категория групп $\mathcal{G}rp$: объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы групп;
3. категория $A-\mathrm{Mod}$ левых модулей над кольцом A: объекты – A-модули, морфизмы – гомоморфизмы A-модулей;
4. категория топологических пространств $\mathcal{T}op$: объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения топологических пространств;
5. категория гладких многообразий $\mathcal{S}m$: объекты – гладкие многообразия, морфизмы – гладкие отображения гладких многообразий;
6. *дискретная категория* – любое множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, морфизмы – по одному тождественному морфизму для каждого элемента;
7. любое частично упорядоченное множество можно рассматривать как категорию: объекты – элементы множества, из A в B есть единственный морфизм тогда и только тогда, когда $A \leqslant B$;
8. по любому ориентированному графу можно построить категорию: объекты – вершины, морфизмы – цепочки последовательно идущих рёбер;
9. любую группу можно рассматривать как категорию: объект единственный, а в качестве его морфизмов в себя берётся группа;
10. …

Морфизм называется *изоморфизмом*, если для него существует обратный морфизм. Два объекта называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Начальным (или *универсальным отталкивающим*) объектом категории $\mathcal{C}$ называется такой объект I, что множество $\mathrm{Hom}(I, X)$ состоит из одного элемента для всех объектов X в $\mathcal{C}$. Двойственным образом, *конечный* (или *универсальный притягивающий*) объект категории $\mathcal{C}$ – это такой объект T, что множество $\mathrm{Hom}(X, T)$ состоит из одного элемента для всех объектов X.

Примеры: в категории множеств начальный объект – пустое множество, конечный объект – множество из одного элемента. В категории групп группа из одного элемента – это и начальный, и конечный объект. В категории колец начальный объект – кольцо целых чисел, а конечного объекта не существует. В категории "упорядоченное множество" начальный и конечный объекты – это наименьший и наибольший элементы (если они существуют).

Есть и более содержательные примеры.

Пример 1. Пусть M, N – модули над коммутативным кольцом A. Рассмотрим категорию, где объекты – билинейные отображения $f\colon M \times N \to K$ в некоторый A-модуль, а морфизмы из $f\colon M \times N \to K$ в $f'\colon M \times N \to K'$ – это такие гомоморфизмы модулей $g\colon K \to K'$, что $gf = f'$. Тогда начальный объект – это канонический гомоморфизм $M \times N \to M \otimes_A N$.

Лемма 2. *Начальный объект в категории, если он есть, единствен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть X и X' – начальные объекты в $\mathcal{C}$. Тогда существуют морфизмы $f\colon X \to X'$ и $f'\colon X' \to X$. Морфизм из X в X единствен, поэтому $1_X = f'f$. Аналогично, морфизм из X' в X' единствен, поэтому $1_{X'} = ff'$. Значит, f и f' – взаимно обратные изоморфизмы. □

Аналогично, конечный объект в категории, если он есть, единствен с точностью до изоморфизма.

Двойственной категорией $\mathcal{C}^\circ$ к категории $\mathcal{C}$ называется "категория $\mathcal{C}$ с обращёнными стрелками": $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Ясно, что начальный объект в категории $\mathcal{C}^\circ$ – это конечный объект в $\mathcal{C}$.

Если операция, применяемая к объектам некоторой категории, может быть естественно продолжена и на морфизмы, то такая операция называется функториальной.

(Ковариантный) функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ состоит из:

1. действия на объектах – правила, сопоставляющего каждому объекту $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ некоторый объект $F(A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$;

2. действия на морфизмах – отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ для всякой пары $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;

при этом действие на морфизмы должно сохранять композицию и единицу: $F(\phi\psi) = F(\phi)F(\psi)$ и $F(1_A) = 1_{F(A)}$. *Контравариантный функтор* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ – это по определению ковариантный функтор из $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{D}$.

Примеры:

1. Забывание: "тождественные" функторы $\mathcal{G}rp \to \mathcal{S}ets$, $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$, $\mathcal{S}m \to \mathcal{T}op$, $A{-}\mathrm{mod} \to \mathbb{Z}{-}\mathrm{mod}$;

2. двойственность (контравариантный функтор из категории k-векторных пространств в себя): $V \mapsto V^*$;

3. i-е сингулярные гомологии $\mathcal{T}op \to \mathcal{A}b$: $X \mapsto H_i(X, \mathbb{Z})$;

4. i-е сингулярные когомологии (контравариантный функтор) $\mathcal{T}op \to \mathcal{A}b$: $X \mapsto H^i(X, \mathbb{Z})$;

5. тензорные/симметрические/внешние степени модуля над коммутативным кольцом;

6. функтор Галуа (контравариантный) из категории расширений Галуа поля k (морфизмы – включения) в группы: $K \mapsto Gal(K/\mathsf{k})$

7. функтор из категории аффинных алгебраических многообразий и регулярных отображений в категорию коммутативных алгебр: многообразию X сопоставляется алгебра $\mathsf{k}[X]$ (это контравариантный функтор);

8. функтор из категории неприводимых алгебраических многообразий и доминантных рациональных отображений в категорию полей: многообразию X сопоставляется поле $\mathsf{k}(X)$ (это контравариантный функтор);

9. ...

Многие известные определения можно сказать на языке функторов. Например, представление группы G над полем k – это всё равно, что функтор из категории 9 из списка в категорию векторных пространств. Морфизм в категории – всё равно, что функтор из категории, соответствующей графу $\bullet \to \bullet$, в нашу категорию. Так же определяются другие диаграммы в категории. Так, коммутативный квадрат в категории $\mathcal{C}$ – это всё равно, что функтор из категории

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

в категорию $\mathcal{C}$.

Очевидным образом определяются композиция функторов и тождественный функтор.

Прямое произведение категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ определяется как категория $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, объекты которой – пары (A, B), где $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$, а морфизмы из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) – это $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, A_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(B_1, B_2)$.

Пусть $\mathcal{C}$ – категория. Определим функтор $\operatorname{Hom}\colon \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$:
на объектах: $(A, B) \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, на морфизмах: $(f, g) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}}((A_1, B_1), (A_2, B_2))$ переходит в

$$u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}ets}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, B_1), \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, B_2)),$$

где для $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$ имеем $u(h) = ghf \in \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h"] & B_1 \arrow[d, "g"] \\ A_2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u(h)"] & B_2 \end{tikzcd}.$$

Проверим, что Hom – действительно функтор. Пусть (f_1, g_1) – морфизм из (A_1, B_1) в (A_2, B_2) (где $f_1 \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1)$, а $g_1 \in \operatorname{Hom}(B_1, B_2)$), а (f_2, g_2) – морфизм из (A_2, B_2) в (A_3, B_3). Тогда их композиция – морфизм $(f_1 f_2, g_2 g_1)$. Функтор Hom переводит эти три морфизма в морфизмы $u\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_2, B_2)$, $v\colon \operatorname{Hom}(A_2, B_2) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$ и $w\colon \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \to \operatorname{Hom}(A_3, B_3)$, необходимо проверить, что $vu = w$. Возьмём элемент $h \in \operatorname{Hom}(A_1, B_1)$. По определению, $u(h) = g_1hf_1$, $v(u(h)) = g_2(g_1hf_1)f_2$, а $w(h) = (g_2g_1)h(f_1f_2)$, то есть, всё сошлось.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h"] & B_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dd, bend left, "g_2g_1"] \\
A_2 \arrow[u, "f_1"'] \arrow[r, "g_1hf_1"] & B_2 \arrow[d, "g_2"'] \\
A_3 \arrow[u, "f_2"'] \arrow[uu, bend left, "f_1f_2"] \arrow[r, "g_2g_1hf_1f_2"] & B_3
\end{tikzcd}$$

Наконец, определим морфизмы функторов (раньше их ещё называли естественные преобразования функторов).

Пусть F и G – функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$. *Морфизмом функторов* из F в G называется семейство морфизмов $\phi(A)\colon F(A) \to G(A)$, по одному для каждого объекта A в $\mathcal{C}$, такое, что для любого морфизма $f\colon A \to B$ в $\mathcal{C}$ диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\phi(A)"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\phi(B)"] & G(B).
\end{tikzcd}$$

Композиция морфизмов функторов и тождественный автоморфизм функтора определяются очевидным образом. Тем самым, определено понятие изоморфизма функторов.

Пусть X – объект некоторой категории $\mathcal{C}$. Определим функтор точек $h^X\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ равенствами:

$$h^X(Y) = \operatorname{Hom}(Y, X)$$

на объектах,

$$h^X(f)(-) = - \circ f\colon \operatorname{Hom}(Y_1, X) \to \operatorname{Hom}(Y_2, X)$$

для морфизма $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(Y_1, Y_2) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_2, Y_1)$. Функтор $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$, изоморфный функтору h^X для некоторого X, называется *представимым*, а X называется объектом, представляющим этот функтор.

Можно определить функтор ко-точек и копредставимый функтор.

Лемма 3 (лемма Йонеды). *1. Пусть $F\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{S}ets$ – функтор, а X – объект $\mathcal{C}$. Имеется биекция между множеством морфизмов функторов из h^X в F и множеством $F(X)$.*

2. $\operatorname{Hom}_{Fun}(h^X, h^Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (первое множество – морфизмы функторов).

3. Объект, представляющий представимый функтор, определён однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. 1. Пусть $\phi\colon h^X \to F$ – морфизм функторов. Сопоставим ему элемент множества $F(X)$. Для этого рассмотрим отображение множеств $\phi(X)\colon h^X(X) \to F(X)$ и возьмём элемент $u = \phi(X)(1_X)$. Оказывается, он однозначно определяет морфизм функторов ϕ. Действительно, восстановим отображение $\phi(Y)\colon h^X(Y) \to F(Y)$. Пусть $f \in$

$h^X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$ – морфизм. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} h^X(X) \arrow[r, "h^X(f)"] \arrow[d, "\phi(X)"] & h^X(Y) \arrow[d, "\phi(Y)"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

По определению морфизма функторов, $\phi(Y)h^X(f) = F(f)\phi(X)$. Поэтому

$$\phi(Y)(f) = \phi(Y)h^X(f)(1_X) = F(f)\phi(X)(1_X) = F(f)(u).$$

Обратно, если взять произвольный элемент $u \in F(X)$ и положить $\phi(Y)(f) = F(f)(u)$, то получится морфизм функторов $h^X \to F$.

2 следует из 1 для $F = h^Y$:

$$\mathrm{Hom}_{Fun}(h^X, h^Y) = h^Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

3 следует из 2: если h^X и h^Y изоморфны, то X и Y изоморфны. $\square$

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что сопоставление $X \mapsto h^X$ задаёт вложение категории $\mathcal{C}$ в категорию контравариантных функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{S}ets$.

Многие конструкции удобно описывать на языке представимых функторов.

Пусть $X_i, i \in I$ – некоторое множество объектов категории $\mathcal{C}$. *Произведением* X_i называется объект, представляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(-, X_i)$. *Копроизведением* X_i называется объект, копредставляющий функтор $\prod_i \mathrm{Hom}(X_i, -)$. По лемме Йонеды произведение и копроизведение определены однозначно, если существуют. Обозначения: $\prod_i X_i$ и $\coprod_i X_i$.

Примеры: произведение в категории множеств – это прямое произведение, копроизведение в категории множеств – это несвязное объединение. Произведение и копроизведение в категории модулей над кольцом называются прямым произведением и прямой суммой, они изоморфны для конечного числа слагаемых. Произведение и копроизведение в категории подмножеств фиксированного множества – это пересечение и объединение.