Комплексы и когомологии

Пример 1. Пусть V – векторное пространство над k. Рассмотрим ковариантный функтор на категории ассоциативных алгебр над k с единицей, сопоставляющий алгебре A множество $\mathrm{Hom}_{\mathsf{k}-vect}(V, A)$ морфизмов векторных пространств. Этот функтор копредставим тензорной алгеброй $T^{\bullet}V$.

Пример 2. Тензорное произведение модулей M и N – это модуль, копредставляющий функтор $X \mapsto$ множество билинейных отображений$M \times N \to X$.

Пусть для пары функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ имеется изоморфизм функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R-).$$

В таком случае L называется *левым сопряжённым* функтором к R, а R – *правым сопряжённым* функтором к L.

Примеры:

1. левый сопряжённый к функтору забывания $\mathcal{T}op \to \mathcal{S}ets$ – взятие дискретной топологии, правый сопряжённый – взятие топологии слипшихся точек;
2. левый сопряжённый к забыванию из групп в множества – взятие свободной группы;
3. левый сопряжённый к забыванию из коммутативных k-алгебр в k-векторные пространства – взятие симметрической алгебры;

При доказательстве сопряжённости функторов полезно следующее утверждение.

Предложение 3. *Сопряжённость функторов $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $R\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ равносильна существованию морфизмов функторов $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to RL$ (единица) и $LR \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ (коединица) таких, что композиции*

$$L \to LRL \to L \quad \text{и} \quad R \to RLR \to R$$

тождественны.

Доказательство. Пусть имеется изоморфизм функторов

$$\phi_{-,-}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, R-).$$

Построим единицу. Рассмотрим композицию отображений

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L-, L-) \xrightarrow{\phi_{-,L-}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, RL-).$$

По лемме Йонеды "по первому аргументу", получаем морфизм $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to RL$. Другими словами, для объекта $X \in \mathcal{C}$ морфизм единицы $e_X\colon X \to RLX$ соответствует 1_{LX} при изоморфизме $\phi_{X,LX}\colon \mathrm{Hom}(LX, LX) \to \mathrm{Hom}(X, RLX)$. Построим коединицу. Рассмотрим композицию морфизмов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R-, R-) \xrightarrow{\phi^{-1}_{R-,-}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(LR-, -).$$

По лемме Йонеды "по второму аргументу", получаем морфизм $LR \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$. Для $Y \in \mathcal{D}$ коединица $LRY \to Y$ отвечает 1_{RY} при изоморфизме $\phi_{RY,Y}\colon \mathrm{Hom}(LRY, Y) \to \mathrm{Hom}(RY, RY)$.

Проверим, что композиция $L \to LRL \to L$ тождественна на объекте X. Морфизм $LRLX \to LX$ получается из 1_{RLX} при изоморфизме $\phi^{-1}_{RLX,LX}\colon \operatorname{Hom}(RLX, RLX) \to \operatorname{Hom}(LRLX, LX)$. Рассмотрим коммутативную (потому, что ϕ – морфизм функторов) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(RLX, RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{RLX,LX}"] \arrow[d, "{(e_X,1)}"] & \operatorname{Hom}(LRLX, LX) \arrow[d, "{(e_X,1)}"] \\
\operatorname{Hom}(X, RLX) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X,LX}"] & \operatorname{Hom}(LX, LX).
\end{tikzcd}$$

Вычисляя композицию стрелок, применённую к 1_{RLX}, получаем одним способом искомую композицию $LX \to LX$, а другим способом – тождественный морфизм.

Аналогично проверяется, что композиция $R \to RLR \to R$ тождественна. $\square$

Зная понятия композиции функторов и тождественного функтора, несложно дать определение взаимно обратных функторов и изоморфизма категорий. Однако такое определение оказывается бесполезным – в природе изоморфизмов категорий почти не бывает. Причина этого проста: естественные конструкции часто строят объект, изоморфный исходному, но это уже не сам исходный объект. Типичный пример – дважды двойственное векторное пространство. Правильное понятие такое:

Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если существуют функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ такие, что $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Функторы F и G при этом называются *эквивалентностями* (а также *квазиобратными* друг другу).

Лемма 4. *Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ – эквивалентность тогда и только тогда, когда*
1) (F строго полный*) отображение* $\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(F(X), F(Y))$ *– биекция для всех $X, Y \in \mathcal{C}$ и*
2) (F существенно сюръективный*) любой объект в $\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $F(X)$.*

Пример 5. Категория конечномерных k-векторных пространств эквивалентна следующей: объекты – неотрицательные целые числа, морфизмы из n в m – матрицы размера $m \times n$ с элементами из k, композиция морфизмов – умножение матриц.

Основная теорема теории Галуа – тоже утверждение об эквивалентности категорий.

Примеры эквивалентности категорий из алгебраической геометрии:

1. аффинные алгебраические многообразия над k и конечно порождённые алгебры над k без нильпотентов;

2. алгебраические многообразия над k с доминантными рациональными морфизмами и конечно порождённые поля над k;

3. радикальные идеалы в $\mathsf{k}[X]$ и подмногообразия в аффинном многообразии X;

4. простые идеалы в $\mathsf{k}[X]$ и неприводимые подмногообразия в аффинном многообразии X;

Теперь перейдём к сегодняшней лекции.

Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей. Говоря о модулях, мы будем иметь в виду левые A-модули.

Когомологическим комплексом называется набор модулей $K^i, i \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов модулей $d^i \colon K^i \to K^{i+1}$ таких, что $d^2 = 0$ (т.е. $d^{i+1} \circ d^i = 0$ при всех i). Гомоморфизмы d^i называются *дифференциалами*. Комплекс выглядит так:

$$\ldots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \to \ldots$$

Часто используются нижние индексы и дифференциалы, понижающие градуировку: $K_i = K^{-i}, d_i = d^{-i}$. В таком случае говорят о *гомологическом комплексе*. Также часто вместо набора K^i рассматривают градуированный модуль $K^\bullet = \oplus_i K^i$ и однородный гомоморфизм $d^\bullet \colon K^\bullet \to K^\bullet$ степени 1.

Примеры:

1. Модуль M можно рассматривать как тривиальный комплекс : $K^i = 0$ при $i \neq 0$, $K^0 = M$ иначе, все $d^i = 0$.

2. Ещё один тривиальный комплекс: $\ldots 0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \ldots$

3. Точная тройка: комплекс $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$, где $M' \subset M$ – подмодуль.

4. $$\ldots \to \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \to \ldots$$

5. Комплекс цепей/коцепей триангулированного гладкого многообразия/клеточного пространства/симплициального множества.

6. Комплекс де Рама на гладком многообразии.

(Ко)циклами комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ называются модули $Z^i = \ker d^i$, *(ко)границами* называются модули $B^i = \operatorname{im} d^{i-1}$. Из-за соотношения $d^2 = 0$ имеем $B^i \subset Z^i \subset K^i$. Когомологиями комплекса называются модули $H^i = Z^i/B^i$, фактормодули циклов по границам. Для коцикла $x \in Z_i$ через $[x] \in H^i$ обозначим его класс в когомологиях. Комплекс, все когомологии которого равны нулю, называется *точным* или *ацикличным*.

Морфизмом комплексов из $(K^\bullet, d_K^\bullet)$ в $(L^\bullet, d_L^\bullet)$ называется набор гомоморфизмов модулей $f^i \colon K^i \to L^i$ такой, что $df = fd$ (т.е., $d_L^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_K^i$). Морфизм комплексов выглядит так:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "f^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Получаем категорию комплексов A-модулей, которую обозначим $\operatorname{Kom}(A{-}\mathrm{mod})$.

Со всяким морфизмом комплексов связан морфизм на когомологиях. Пусть

$$f^\bullet \colon (K^\bullet, d_K^\bullet) \to (L^\bullet, d_L^\bullet)$$

– морфизм. Определим гомоморфизм $H^i(K) \to H^i(L)$: пусть элемент $x \in Z^i$ представляет класс когомологий, сопоставим этому классу класс элемента $f^i(x)$ в $H^i(L)$. Несложно проверить, что всё корректно: $f^i(x)$ – коцикл и изменение x на кограницу меняет $f^i(x)$ на кограницу.

Таким образом, имеем функторы H^i из категории комплексов $\mathrm{Kom}(A{-}\mathrm{mod})$ в категорию $A{-}\mathrm{mod}$.

Морфизм, индуцирующий изоморфизм в когомологиях, называется *квазиизоморфизмом*, а комплексы, между которыми существует цепочка квазиизоморфизмов (возможно, идущих в разные стороны), – *квазиизоморфными.*

Важное средство вычисления когомологий комплексов – длинная точная последовательность в когомологиях.

Набор модулей и гомоморфизмов $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ называется *точной тройкой*, если он точен как комплекс (т.е., f инъективно, g сюръективно и $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$). Набор комплексов и морфизмов комплексов $0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$ называется точной тройкой комплексов, если для любого i имеем точную тройку модулей $0 \to K^i \xrightarrow{f^i} L^i \xrightarrow{g^i} M^i \to 0$. Морфизмы f и g индуцируют морфизмы когомологий $H^i(K) \to H^i(L) \to H^i(M)$.

Предложение 6. *Со всякой точной тройкой комплексов*

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \to 0$$

связана длинная точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^{i-1}(M) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(L) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K) \to \ldots$$

Доказательство. Определим так называемые *связывающие гомоморфизмы* $\delta^i \colon H^i(M) \to H^{i+1}(K)$.

Пусть $x \in Z^i(M)$ представляет класс в $H^i(M)$. Возьмём любой $y \in L^i$ так, что $g(y) = x$, пусть $z = d(y)$ Поскольку $g(z) = gd(y) = dg(y) = d(x) = 0$, найдётся $t \in K^{i+1}$ такой, что $f(t) = z$. При этом $fd(t) = df(t) = d(z) = dd(y) = 0$, значит и $d(t) = 0$. Положим $\delta([x]) = [t] \in H^{i+1}(K)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{i+2} \arrow[r, "f"] & L^{i+2} & & \\
0 \arrow[r] & K^{i+1} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "d"] & L^{i+1} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^{i+1} \arrow[r] & 0 \\
 & & L^i \arrow[r, "g"] \arrow[u, "d"] & M^i \arrow[r] \arrow[u, "d"] & 0
\end{tikzcd}$$

Нехитрая проверка показывает, что класс когомологий $[t]$ не зависит от сделанных выборов x и y.

Проверим точность длинной последовательности в члене

$$H^i(L) \xrightarrow{H^i(g)} H^i(M) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K).$$

Во-первых, $\delta H(g) = 0$. Пусть $x \in Z^i(L)$, тогда $H^i(g)([x]) = [g(x)]$, и по построению связывающего гомоморфизма $\delta([g(x)]) = 0$, так как $d(x) = 0$. Во-вторых, $\ker \delta = \mathrm{im}\, H(g)$. Пусть $x \in Z^i(M)$ представляет класс в $H^i(M)$ и $\delta([x]) = 0$, а y, z, t – как в определении δ. Так как $[t] = 0$, $t = d(s)$ для $s \in K^i$, положим $y' = f(s)$. Заметим, что $d(y - y') = z - df(s) = z - fd(s) = z - f(t) = z - z = 0$ и $g(y - y') = x - gf(s) = x$, следовательно $[x] = H^i(g)(y - y') \in \mathrm{im}\, H(g)$.

Аналогично проверяется точность в остальных членах, детали оставлены читателю. $\square$

Как вычислять когомологии комплекса? Один из способов – доказать, что они нулевые. Среди всех комплексов с нулевыми когомологиями проще всего устроены стягиваемые.

Морфизм комплексов $f^\bullet \colon K^\bullet \to L^\bullet$ называется *гомотопным нулю*, если существует набор морфизмов $h^i \colon K^i \to L^{i-1}$, для которых

$$f = dh + hd,$$

т.е., $f^i = d^{i-1}h^i + h^{i+1}d^i$. Два морфизма $f^\bullet, g^\bullet \colon K^\bullet \to L^\bullet$ *гомотопны*, если их разность гомотопна нулю. Очевидно, гомотопные нулю морфизмы образуют подгруппу, а гомотопия – отношение эквивалентности. Обозначение: $f^\bullet \sim g^\bullet$. Несложно проверить, что гомотопные нулю морфизмы образуют идеал: композиция любого морфизма комплексов с гомотопным нулю снова гомотопна нулю.

Это значит, что корректно определена гомотопическая категория комплексов $K(A{-}\mathrm{mod})$. Её объекты – комплексы A-модулей, а морфизмы из $K^\bullet$ в $L^\bullet$ – факторгруппа морфизмов комплексов по морфизмам, гомотопным нулю.

Предложение 7. *Гомотопные морфизмы $f^\bullet, g^\bullet \colon K^\bullet \to L^\bullet$ индуцируют одинаковое отображение на когомологиях.*

Доказательство. Пусть $f - g = dh + hd$, а $x \in Z^i(K)$. Тогда $H(f)([x]) = [f(x)] = [g(x) + dh(x) + hd(x)] = [g(x)] + [dh(x)] = [g(x)]$, так как класс кограницы $dh(x)$ тривиален. □

На категорном языке это предложение значит, что функторы когомологий H^i корректно определены на гомотопической категории $K(A{-}\mathrm{mod})$.

Комплекс называется *стягиваемым* или *гомотопным нулю*, если его тождественное отображение в себя гомотопно нулю. Комплексы $K^\bullet$ и $L^\bullet$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существуют $f^\bullet \colon K^\bullet \to L^\bullet$ и $g^\bullet \colon L^\bullet \to K^\bullet$ такие, что $fg \sim 1_L, gf \sim 1_K$.

Лемма 8. *Стягиваемый комплекс ацикличен.*

Доказательство. Почти очевидно: если тождественный морфизм $K^\bullet \to K^\bullet$ гомотопен нулевому, то индуцированные ими отображения на когомологиях $H^i(K) \xrightarrow{1} H^i(K)$ и $H^i(K) \xrightarrow{0} H^i(K)$ равны, значит $H^i(K) = 0$. □