Ext и Tor

Напомним, что два комплекса гомотопически эквивалентны, если между ними есть морфизмы, гомотопически обратные друг другу. Два комплекса квазиизоморфны, если между ними есть цепочка морфизмов, каждый из которых индуцирует изоморфизм на когомологиях.

Лемма 1. *Стягиваемый комплекс ацикличен, а гомотопически эквивалентные комплексы квазиизоморфны.*

Доказательство. Первое – частный случай второго.

Если между $K^\bullet$ и $L^\bullet$ имеются гомотопически обратные морфизмы $f^\bullet$ и $g^\bullet$, то индуцированные отображения на когомологиях $H^i(f)\colon H^i(K) \to H^i(L)$ и $H^i(g)\colon H^i(L) \to H^i(K)$ взаимно обратны, поэтому f и g – квазиизоморфизмы. □

Пример 2. Комплекс

$$\ldots \to \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x]/(x^2) \to \ldots$$

ацикличен, но не стягиваем.

Наша цель на сегодня – определить Ext и Tor, функторы от двух аргументов на категории модулей. Их конструкция – частный случай определения производных функторов от функторов, точных слева или справа. В этом контексте и дадим определения.

Но сперва обрисуем конечный результат – сведения об Ext и Tor, которые мы хотим получить.

Функторы $\mathrm{Ext}^i_A(-,-)\colon (A\mathrm{-mod})^\circ \times (A\mathrm{-mod}) \to \mathcal{A}b$ определены для целых $i \geqslant 0$. Функтор $\mathrm{Ext}^0(M,N)$ изоморфен $\mathrm{Hom}(M,N)$. Далее, $\mathrm{Ext}^i(M,N) = 0$ при $i > 0$ и проективном M или инъективном N. Имеются две длинные точные последовательности. Во-первых, для каждой точной тройки $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ и модуля N имеется точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0(M',N) \arrow[drr] & \mathrm{Ext}^0(M,N) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^0(M'',N) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
\mathrm{Ext}^1(M',N) \arrow[drr] & \mathrm{Ext}^1(M,N) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^1(M'',N) \arrow[l] & \\
\mathrm{Ext}^2(M',N) \arrow[drrr] & \mathrm{Ext}^2(M,N) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^2(M'',N) \arrow[l] & \\
& \ldots & & {}
\end{tikzcd}$$

Во-вторых, для каждой точной тройки $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ и модуля M имеется точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^0(M,N'') \arrow[dll] \\
& \mathrm{Ext}^1(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,N'') \arrow[dll] \\
& \mathrm{Ext}^2(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(M,N'') \arrow[dll] \\
& {} & \ldots &
\end{tikzcd}$$

Функторы $\mathrm{Tor}_i^A(-,-)\colon (\mathrm{mod}-A)\times(A-\mathrm{mod})\to\mathcal{A}b$ определены для целых $i\geqslant 0$. Функтор $\mathrm{Tor}_0(M,N)$ изоморфен $M\otimes_A N$, и напротив, $\mathrm{Tor}_i(M,N)=0$ при $i>0$ и проективном M или N. Имеются две длинные точные последовательности. Во-первых, для каждой точной тройки $0\to M'\to M\to M''\to 0$ и модуля N имеется точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_0(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_0(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_0(M'',N) \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Tor}_1(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(M'',N) \arrow[ull] & \\
\mathrm{Tor}_2(M',N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(M'',N) \arrow[ull] &
\end{tikzcd}$$

$$\ldots$$

Во-вторых, для каждой точной тройки $0\to N'\to N\to N''\to 0$ и модуля M имеется точная последовательность

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_0(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_0(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_0(M,N'') \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Tor}_1(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1(M,N'') \arrow[ull] & \\
\mathrm{Tor}_2(M,N') \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(M,N'') \arrow[ull] &
\end{tikzcd}$$

$$\ldots$$

Перейдём к конструкции – дадим определения производных функторов.

Определение 3. Функтор $F\colon A-\mathrm{mod}\to\mathcal{A}b$ (или $(A-\mathrm{mod})^\circ\to\mathcal{A}b$) называется *аддитивным*, если он линеен на морфизмах, т.е. для любых модулей M,N отображение абелевых групп $\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(F(M),F(N))$ является гомоморфизмом.

В дальнейшем мы будем рассматривать только аддитивные функторы. В действительности же, нас будут интересовать только два функтора: $\mathrm{Hom}(-,N)\colon (A-\mathrm{mod})^\circ\to\mathcal{A}b$ $M\otimes_A -\colon (A-\mathrm{mod})\to\mathcal{A}b$.

Напомним, последовательность называется *точной*, если когомологии её, рассмотренной как комплекс, нулевые, т.е. образ любой входящей стрелки совпадает с ядром выходящей.

Определение 4. Функтор $F\colon A-\mathrm{mod}\to\mathcal{A}b$ называется *точным*, если он переводит любую точную последовательность модулей $M\to N\to K$ в точную последовательность $F(M)\to F(N)\to F(K)$.

Функтор $F\colon A-\mathrm{mod}\to\mathcal{A}b$ называется *точным слева*, если он переводит любую точную последовательность $0\to M'\to M\to M''\to 0$ в точную последовательность $0\to F(M')\to F(M)\to F(M'')$.

Функтор $F\colon A-\mathrm{mod}\to\mathcal{A}b$ называется *точным справа*, если он переводит любую точную последовательность $0\to M'\to M\to M''\to 0$ в точную последовательность $F(M')\to F(M)\to F(M'')\to 0$.

Контравариантный функтор называется точным/точным слева/точным справа, если он точен/точен слева/точен справа как функтор $(A{-}\mathrm{mod})^\circ \to B{-}\mathrm{mod}$.

Примеры: тождественный и нулевой функторы точны. Функтор Hom точен слева по каждому из аргументов.

Лемма 5. *Пусть N – модуль. Тогда функторы* $\mathrm{Hom}(N,-)$ *и* $\mathrm{Hom}(-,N)$ *точны слева.*

Доказательство. Точность слева функтора $\mathrm{Hom}(N,-)$ более-менее очевидна. Проверим для $\mathrm{Hom}(-,N)$.

Пусть $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ – точная тройка. Проверим, что последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(L,N) \to \mathrm{Hom}(K,N)$ точна. 1) если $h\colon M \to N$ и $hg = 0$, то $h = 0$ так, как g сюръективно. 2) если $h\colon L \to N$ и $hf = 0$, то $h\mid_{\operatorname{im} f} = 0$. Так как $\operatorname{im} f = \ker g, h\mid_{\ker g} = 0$ и значит h имеет вид $h'g$ для некоторого $h'\colon M \to N$. $\square$

Пусть M – правый A-модуль. Можно показать, что тензорное умножение $M \otimes_A - : A{-}\mathrm{mod} \to \mathcal{A}b$ точно справа.

Несложно проверить свойства: точный слева функтор F переводит инъективные морфизмы в инъективные, точную последовательность вида $0 \to K \to L \to M$ – в точную последовательность $0 \to F(K) \to F(L) \to F(M)$. Аналогично для точности справа. Кроме того, функтор точен титтк он точен слева и справа.

По определению, левые производные функторы L_iF от точного справа ковариантного функтора F определяются так:

$$L_iF(M) = H_i(P_\bullet(M)),$$

где $P_\bullet(M)$ – проективная резольвента модуля M. Теперь объясним по порядку, что это значит.

Напомним: модуль P называется *проективным*, если в любой диаграмме

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ L \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной нижней строкой всегда существует пунктирная стрелка, замыкающая диаграмму. Иными словами, если функтор $\mathrm{Hom}(P,-)$ точен. Двойственным образом, модуль I называется *инъективным*, если точен функтор $\mathrm{Hom}(-,I)$.

Как мы видели в задачах, $\oplus P_i$ проективен тогда и только тогда, когда все P_i проективны. Основной пример проективного модуля – свободный. Любой проективный модуль – прямое слагаемое в свободном модуле.

(Левой) резольвентой модуля M называется комплекс вида

$$\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0,$$

у которого $H_i(P_\bullet) = 0$ при $i \neq 0$ и $H_0(P_\bullet) = M$. Положив $P_{-1} = M$, резольвенту можно достроить до ацикличного комплекса

$$\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Резольвента называется *проективной* (*свободной* и проч.), если все её члены (не считая M) проективные, свободные и проч. модули.

Примеры: $\mathbb{Z} \xrightarrow{7} \mathbb{Z}$ – проективная резольвента $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

$$\mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(-y,x)} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{\binom{x}{y}} \mathsf{k}[x,y]$$

– проективная резольвента $\mathsf{k}[x,y]$-модуля $\mathsf{k} = \mathsf{k}[x,y]/(x,y)$. Bar-резольвента – это резольвента B как $B \otimes B^{op}$-модуля. Как мог заметить внимательный слушатель, все приведённые примеры – свободные резольвенты.

Лемма 6. *У любого модуля есть проективная резольвента.*

Лемма 7. *Любой модуль над кольцом – фактормодуль проективного.*

Доказательство. Очевидно – любой модуль M можно накрыть свободным с достаточно большим числом образующих, например, модулем $\oplus_{m \in M} Ae_m$: образующая e_m переходит в $m \in M$. $\square$

Доказательство леммы 6. Накроем заданный модуль M проективным модулем P_0. Пусть Z_0 – ядро $d_0 \colon P_0 \to M$. Накроем Z_0 проективным P_1 и рассмотрим сквозное отображение $d_1 \colon P_1 \to Z_0 \to P_0$. $\operatorname{im} d_1 = Z_0 = \ker d_0$, так что в 0-м члене комплекс $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точен. Далее накроем ядро d_1 проективным модулем P_2 и т.д. $\square$

Теперь можно определить действие производного функтора на объектах, т.е. модулях.

Определение 8. Пусть $F \colon A-\mathrm{mod} \to Ab$ – точный справа ковариантный функтор, а M – A-модуль. Фиксируем проективную резольвенту $P_\bullet(M)$ модуля M. Для $i \geqslant 0$ определим модуль $L_iF(M)$ равенством

$$L_iF(M) = H_i(F(P_\bullet(M))).$$

Из определения следует, что для левых производных функторов верно $L_iF = 0$ при $i < 0$ и $L_0F \cong F$. Действительно, пусть $\ldots P_1 \to P_0$ – резольвента для M. Тогда имеется точная последовательность $P_1 \to P_0 \to M \to 0$. Применяя точный справа функтор, получим точную последовательность $F(P_1) \to F(P_0) \to F(M) \to 0$, это и означает, что $H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M)$.

Чтобы определить производные функторы, надо задать действие L_iF не только на объектах (модулях), но и на морфизмах. Кроме того, естественно проверить, что производные функторы не зависят от выбора резольвенты.

Для этого понадобится следующее утверждение.

Предложение 9. *1. Пусть $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ – проективные резольвенты модулей M и N, а $f \colon M \to N$ – гомоморфизм. Тогда существует морфизм комплексов $f_\bullet \colon P_\bullet \to Q_\bullet$, индуцирующий f на H_0.*

2. Этот морфизм комплексов определен однозначно с точностью до гомотопии.

3. Проективная резольвента модуля единственна с точностью до гомотопии.

Доказательство. 1. Добавим к $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ (-1)-е члены M и N.

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_0 d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "f_0"] \arrow[dr, bend left, "f d_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
Q_2 \arrow[r, "d_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] & Q_0 \arrow[r, "d_0"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Теперь построим f_0. Так как P_0 проективен и d_0^Q сюръективен, существует $f_0\colon P_0 \to Q_0$ такой, что $d_0^K f_0 = f d_0^P$. Далее, $f_0 d_1^P$ попадает в $\ker d_0^Q$, а значит, в $\operatorname{im} d_1^Q$. Т.к. P_1 проективен, существует $f_1\colon P_1 \to Q_1$ такой, что $d_1^k f_1 = f_0 d_1^P$. И так далее.

2. Доказывается аналогично, строится гомотопия между двумя данными морфизмами резольвент шаг за шагом.

3. Пусть $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ – две проективные резольвенты модуля M. По 1., тождественный морфизм 1_M продолжается до морфизмов резольвент $f_\bullet\colon P_\bullet \to P'_\bullet$ и $f'_\bullet\colon P'_\bullet \to P_\bullet$. Причём 1_M продолжается до двух морфизмов $P_\bullet \to P_\bullet$: $f'_\bullet f_\bullet$ и $1_{P_\bullet}$. По 2., $f'_\bullet f_\bullet \sim 1_{P_\bullet}$, аналогично $f_\bullet f'_\bullet \sim 1_{P'_\bullet}$. Т.е., $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ гомотопически эквивалентны. □

Следствие 10. *Сопоставление модулю его проективной резольвенты – функтор из категории модулей в гомотопическую категорию комплексов.*

Заметим, что любой аддитивный функтор переводит гомотопные морфизмы в гомотопные и, значит, гомотопические эквивалентности – в гомотопические эквивалентности.

Следствие 11. *Производные функторы можно вычислять при помощи любой проективной резольвенты.*

Доказательство. Пусть $P_\bullet$ – фиксированная проективная резольвента для M, а $P'_\bullet$ – другая. Тогда имеется гомотопическая эквивалентность $f_\bullet\colon P_\bullet \to P'_\bullet$. Применение F даёт снова гомотопическую эквивалентность $F(P_\bullet) \to F(P'_\bullet)$. Вычисление гомологий даёт изоморфизмы по лемме 1. □

Наконец, определим действие производных функторов на морфизмах.

Определение 12. Пусть F – точный справа ковариантный функтор. Пусть $f\colon M \to N$ – гомоморфизм модулей, продолжим его как-нибудь до гомоморфизма резольвент $f_\bullet\colon P_\bullet(M) \to P_\bullet(N)$ и положим

$$L_i F(f) = H_i(F(f_\bullet)).$$

Так как $f_\bullet$ и $F(f_\bullet)$ определены однозначно с точностью до гомотопии, индуцированное ими отображение на когомологиях определено однозначно.

Правые производные функторы $R^i F$ от точного слева ковариантного функтора F определяются аналогично с использованием инъективных резольвент, растущих вправо.

Правые производные функторы $R^i F$ от точного слева контравариантного функтора F определяются аналогично с использованием инъективных резольвент в двойственной категории $(A\text{-mod})^\circ$, т.е., проективных резольвент в категории модулей: если $P_\bullet$ – резольвента для M, то $F(P_\bullet)$ – когомологический комплекс и по определению $R^i F(M) = H^i(F(P_\bullet))$.

Теперь определим Ext. Пусть M, N – модули над кольцом A. По определению,

$$\operatorname{Ext}^i(M,N) = R^i F(M), \quad \text{где} \quad F(M) = \operatorname{Hom}(M,N)$$

– точный слева контравариантный функтор.

Из определения следует, что $\operatorname{Ext}^i(M,N) = 0$, если M проективный и $i > 0$: в качестве проективной резольвенты для M можно взять сам модуль M, рассмотренный как комплекс с одним членом. Кроме того, $\operatorname{Ext}^i(M,N) = 0$, если N инъективный и $i > 0$. Действительно, пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента для M. Тогда последовательность

$\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точна. Так как функтор $F = \mathrm{Hom}(-, N)$ точен, то последовательность $0 \to F(M) \to F(P_0) \to F(P_1) \to F(P_2) \to \dots$ тоже точна, и отсюда $\mathrm{Ext}^i(M, N) = R^i F(M) = H^i(F(P_\bullet)) = 0$ при $i > 0$.

Определим Tor. Пусть M, N – модули над кольцом A (если A некоммутативное, то M – правый модуль, а N – левый). По определению,

$$\mathrm{Tor}_i(M, N) = L_i F(N), \quad \text{где} \quad F(M) = M \otimes_A -$$

– точный справа ковариантный функтор.

Из определения следует, что $\mathrm{Tor}_i(M, N) = 0$, если N проективный и $i > 0$. В качестве проективной резольвенты для N можно взять сам N. Кроме того, $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$, если M проективный и $i > 0$. Действительно, пусть $P_\bullet$ – проективная резольвента для N. Тогда последовательность $\dots P_2 \to P_1 \to P_0 \to N \to 0$ точна. При этом функтор $F = M \otimes -$ точен: это так для свободного модуля M, а значит и для прямого слагаемого в свободном модуле, каким является M. Значит, последовательность $\dots F(P_2) \to F(P_1) \to F(P_0) \to F(N) \to 0$ тоже точна, и отсюда $\mathrm{Tor}_i(M, N) = L_i F(N) = H_i(F(P_\bullet)) = 0$ при $i > 0$.

Мы определяли Ext^i как производные функторы по первому аргументу при фиксированном втором. Можно показать, что они могут быть также определены как производные по второму аргументу при фиксированном первом. Т.е., что

$$\mathrm{Ext}^i(M, N) \cong H^i(\mathrm{Hom}(M, I^\bullet)),$$

где $I^\bullet$ – инъективная резольвента N.

Аналогично, Tor_i можно вычислять как производные функторы по первому аргументу:

$$\mathrm{Tor}_i(M, N) \cong H_i(P_\bullet \otimes N),$$

где $P_\bullet$ – проективная резольвента M.