Алгебра 3 11.11.11

Лекция 9

Ext и Tor (окончание). Теорема Гильберта о базисе

Объясним, как строить длинные точные последовательности групп Ext и Tor.

Точный функтор, применённый к короткой точной последовательности модулей, даёт снова короткую точную последовательность. Последовательность, полученная применением к

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

функтора F, точного лишь с одной стороны, уже не будет точна. Однако она может быть дополнена до *длинной точной последовательности производных функторов*. Для точного справа ковариантного F эта последовательность имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\cdots & L_2F(M') \arrow[d] & L_1F(M') \arrow[d] & F(M') \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(M) \arrow[d] & L_1F(M) \arrow[d] & F(M) \arrow[d] & \\
\cdots & L_2F(M'') \arrow[uur, "\delta"] & L_1F(M'') \arrow[uur, "\delta"] & F(M'') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить длинную точную последовательность, нужна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ – точная тройка модулей, $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ – проективные резольвенты M' и M''. Тогда существует проективная резольвента $R_\bullet$ модуля M и точная тройка комплексов $0 \to P_\bullet \to R_\bullet \to Q_\bullet \to 0$, продолжающая данную точную тройку и почленно расщепимая.*

Доказательство. Положим $R_i = P_i \oplus Q_i$, морфизмы $P_i \to R_i$ и $R_i \to Q_i$ – канонические вложение и проекция. Определим дифференциалы $d_i^R\colon P_i \oplus Q_i \to P_{i-1} \oplus Q_{i-1}$ и $d_0^R\colon P_0 \oplus Q_0 \to M$ так, чтобы $d^2 = 0$. Тогда из длинной точной последовательности когомологий для тройки комплексов $0 \to P_\bullet \to R_\bullet \to Q_\bullet \to 0$ будет следовать, что $R_\bullet$ – резольвента M.

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "d_2^P"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1^P"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "d_0^P"] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
P_2 \oplus Q_2 \arrow[r, "d_2^R"] \arrow[d] & P_1 \oplus Q_1 \arrow[r, "d_1^R"] \arrow[d] & P_0 \oplus Q_0 \arrow[r, "d_0^R"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
Q_2 \arrow[r, "d_2^Q"] \arrow[uur, "s_2"] & Q_1 \arrow[r, "d_1^Q"] \arrow[uur, "-s_1"] \arrow[uurr, bend left, "s_1'"] & Q_0 \arrow[r, "d_0^Q"] \arrow[ur, "s_0"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

При $i \geqslant 1$ положим $d_i^R(p,q) = (d_i p + s_i q, d_i q)$, где отображения $s_i\colon Q_i \to P_{i-1}$ таковы, что $sd + ds = 0$ (эти отображения определим ниже). Тогда $dd(p,q) = d(dp + sq, dq) = (ddp + (ds + sd)q, ddq) = 0$.

Так как Q_0 проективен, найдётся $s_0\colon Q_0 \to M$, так что $gs_0 = d_0^Q$. Положим $d_0\colon P_0 \oplus Q_0 \to M$ равным $d_0(p,q) = fd_0p + s_0q$. Далее, композиция $g(s_0d_1^Q) = d_0d_1 = 0$, поэтому $s_0d_1^Q$ пропускается через f: $s_0d_1^Q = fs_1'$ для некоторого $s_1'\colon Q_1 \to M'$. Так как Q_1 проективен, s_1' пропускается через P_0, положим $s_1' = -d_0^P s_1$. Тогда

$$d_0^R d_1^R(p,q) = d_0^R(d_1p + s_1q, d_1q) = fd_0(d_1p + s_1q) + s_0d_1q = (fd_0s_1 + s_0d_1)q = (-fs_1' + s_0d_1)q = 0.$$

Продолжая, строим индуктивно $s_i\colon Q_i \to P_{i-1}$. Если s_i построено, то в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "d_i"] & P_{i-1} \arrow[r, "d_{i-1}"] & P_{i-2} \\
Q_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[u, dashed, "s_{i+1}"] & Q_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[u, "s_i"] & Q_{i-1} \arrow[u, "s_{i-1}"]
\end{tikzcd}
$$

имеем $d_{i-1}(s_i d_{i+1}) = -s_{i-1} d_{i+1} d_i = 0$, поэтому $\operatorname{im}(s_i d_{i+1}) \subset \operatorname{im} d_i^P$. В силу проективности Q_{i+1}, отображение $s_i d_{i+1}$ пропускается через d_i^P: $s_i d_{i+1} = -d_i^P s_{i+1}$ для подходящего s_{i+1}. $\square$

Теперь применим к построенной точной тройке резольвент $0 \to P_\bullet \to R_\bullet \to Q_\bullet \to 0$ точный справа функтор F. Поскольку она расщепима, получим снова точную тройку комплексов $0 \to F(P_\bullet) \to F(R_\bullet) \to F(Q_\bullet) \to 0$. Соответствующая длинная точная последовательность в когомологиях и будет искомой длинной точной последовательностью производных функторов. Это – один из основных инструментов для вычисления производных функторов.

Эта конструкция даёт длинную точную последовательность

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^0(M',N) \arrow[drr] & \operatorname{Ext}^0(M,N) \arrow[l] & \operatorname{Ext}^0(M'',N) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
\operatorname{Ext}^1(M',N) \arrow[drr] & \operatorname{Ext}^1(M,N) \arrow[l] & \operatorname{Ext}^1(M'',N) \arrow[l] & \\
\operatorname{Ext}^2(M',N) \arrow[drr] & \operatorname{Ext}^2(M,N) \arrow[l] & \operatorname{Ext}^2(M'',N) \arrow[l] & \\
& \cdots & &
\end{tikzcd}
$$

для точной тройки $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ и модуля N.

А точная последовательность

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^0(M,N') \arrow[r] & \operatorname{Ext}^0(M,N) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^0(M,N'') \arrow[dll] \\
& \operatorname{Ext}^1(M,N') \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(M,N) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(M,N'') \arrow[dll] \\
& \operatorname{Ext}^2(M,N') \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(M,N) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(M,N'') \arrow[dll] \\
& & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

строится по точной тройке $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ и модуля M ещё проще. Пусть $P_\bullet$ – резольвента для M. Тогда последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}(P_\bullet, N') \to \operatorname{Hom}(P_\bullet, N) \to \operatorname{Hom}(P_\bullet, N'') \to 0$$

точна, так как для каждого i последовательность $0 \to \operatorname{Hom}(P_i, N') \to \operatorname{Hom}(P_i, N) \to \operatorname{Hom}(P_i, N'') \to 0$ точна из-за проективности модуля P_i. Переходя в ней к длинной последовательности в когомологиях, получаем требуемое.

Для функторов Tor конструкция аналогична.

Определение 2. *Расширение M с помощью N* – это точная тройка $0 \to N \to K \to M \to 0$. Два расширения *изоморфны*, если существует диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K_2 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Отметим что гомоморфизм f в ней автоматически будет изоморфизмом, это следует из длинной точной последовательности в когомологиях. Поэтому изоморфизм расширений – отношение эквивалентности.

Предложение 3. *Множество классов изоморфизма расширений M с помощью N изоморфно* $\mathrm{Ext}^1(M, N)$.

Для доказательства нам понадобится понятие расслоенного копроизведения.

Определение 4. Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$ – два гомоморфизма модулей. *Корасслоенным* произведением Y и Z над X называется модуль

$$Y \times^X Z = (Y \oplus Z)/\left\langle (f(x), 0) - (0, g(x)) \right\rangle_{x \in X}.$$

Он снабжён гомоморфизмами $Y \to Y \times^X Z$ и $Z \to Y \times^X Z$, образующими коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Y \times^X Z. \end{tikzcd}$$

Этот квадрат обладает универсальным свойством, которое можно взять за определение корасслоенного произведения в произвольной категории:

Определение 5. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ и $X \xrightarrow{g} Z$ – два морфизма в некоторой категории. Корасслоенным произведением $Y \times^X Z$ называется конечный объект в категории коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & T. \end{tikzcd}$$

Ясно из определения, что корасслоенное произведение в категории единственно (если существует).

Доказательство предложения 3. Сопоставим расширению элемент в $\mathrm{Ext}^1(M, N)$. Напишем длинную точную последовательность производных функторов для $\mathrm{Hom}(-, N)$. В ней будет кусок $\mathrm{Hom}(N, N) \to \mathrm{Ext}^1(M, N)$, возьмём образ 1_N в качестве искомого элемента. Опишем это соответствие более явно. Фиксируем проективные резольвенты $P_\bullet, R_\bullet$ и $Q_\bullet$ для N, K, M соответственно как в доказательстве леммы 1. Рассмотрим точную тройку комплексов

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(P_\bullet, N) \leftarrow \mathrm{Hom}(R_\bullet, N) \leftarrow \mathrm{Hom}(Q_\bullet, N) \leftarrow 0.$$

В ней есть фрагмент

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(P_0,N) & \mathrm{Hom}(P_0\oplus Q_0,N) \arrow[l] \arrow[d, "(d_1^R)^*"] & \mathrm{Hom}(Q_0,N) \arrow[l] \arrow[d] \\
& \mathrm{Hom}(P_1\oplus Q_1,N) & \mathrm{Hom}(Q_1,N). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Построим нужный элемент в $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ как класс морфизма в $\mathrm{Hom}(Q_1,N)$, вычислив связывающее отображение в когомологиях. Тождественный морфизм 1_N задаётся элементом $d_0^P \in \mathrm{Hom}(P_0,N)$. Его прообразом в $\mathrm{Hom}(P_0\oplus Q_0,N)$ будет гомоморфизм $(p,q)\mapsto d_0^P p$. При $(d_1^R)^*$ он переходит в гомоморфизм $(p,q)\mapsto d_0^P(d_1^P p + s_1 q) = d_0^P s_1 q = -s_1' q$. Этот гомоморфизм лежит в образе $-s_1' \in \mathrm{Hom}(Q_1,N)$ – это и есть искомый элемент. Получаем морфизм комплексов $f_\bullet$ (коммутативность квадратов следует из доказательства леммы 1)

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1=-s_1'"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0=s_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Его можно рассматривать как морфизм двух резольвент модуля M: $Q_\bullet \to [N\to K]$, поэтому он определён однозначно с точностью до гомотопии.

Чтобы проверить биективность сопоставления расширению элемента в Ext^1, нужно научиться восстанавливать расширение по морфизму $f_1\colon Q_1\to N$. Если задан гомоморфизм $f_1\in\mathrm{Hom}(Q_1,N)$ такой, что $f_1 d_2 = 0$, рассмотрим $N\times^{Q_1} Q_0$. Гомоморфизм $s\colon N\to N\times^{Q_1} Q_0$ будет инъективен: если $s(n)=0$, то (по конструкции корасслоенного произведения) $n=f_1(p_1)$ и $d_1(p_1)=0$. Значит, $p_1=d_2(p_2)$ и $n=f_1d_2(p_2)=0$. Чтобы задать морфизм t из $N\times^{Q_1} Q_0$ в M, рассмотрим пару гомоморфизмов $0\colon N\to M$ и $d_0\colon Q_0\to M$, совпадающие на Q_1. Так как d_0 сюръективен, t тоже сюръективен. Нетрудно проверить, что получается точная тройка. $0\to N\xrightarrow{s} N\times^{Q_1} Q_0 \xrightarrow{t} M\to 0$ Наконец, она будет изоморфна исходному расширению: гомоморфизм $N\times^{Q_1} Q_0\to K$ определяется, исходя из гомоморфизмов $f\colon N\to K$ и $s_0\colon Q_0\to K$, равных на Q_1. ☐

Теперь вернёмся к алгебраической геометрии.

Пусть $X\subset\mathbb{A}^n$ – алгебраическое подмножество, т.е. множество нулей некоторой (возможно, бесконечной) системы многочленов. Идеал $I(X)\subset \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ многообразия X определяется как множество всех многочленов, тождественно равных нулю на X.

Мы хотим показать, что в действительности X может быть задано конечным числом многочленов. Другими словами, что идеал $I(X)$ конечно порождён: найдутся многочлены $f_1,\ldots,f_m\in\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ такие, что всякий многочлен $f\in I(X)$ имеет вид

$$f = f_1c_1+\ldots+f_mc_m,$$

для некоторых $c_i\in\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$.

Это – следствие теоремы Гильберта:

Теорема 6 (теорема Гильберта о базисе). *Любой идеал в кольце $\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ конечно порождён.*

Мы докажем её после некоторой предварительной подготовки.

Определение 7. Модуль M над некоторым кольцом называется *нётеровым*, если любой его подмодуль конечно порождён.

Кольцо A называется *нётеровым*, если любой идеал в A конечно порождён.

Лемма 8. *Пусть последовательность модулей* $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *точна. Тогда модуль* M *нётеров титтк оба модуля* M' *и* M'' *нётеровы.*

Доказательство. Во-первых, если M нётеров, то по определению и его подмодуль M' нётеров. Далее, если $N \subset M''$ – подмодуль, рассмотрим подмодуль $g^{-1}N \subset M$, он порождён конечным числом элементов m_i, и тогда N порождён элементами $g(m_i)$.

Обратно, пусть M' и M'' нётеровы, а $N \subset M$ – подмодуль. Рассмотрим точную тройку $0 \to M' \cap N \to N \to g(N) \to 0$, в которой крайние члены конечно порождены как подмодули в M' и M''. Значит, и средний член N конечно порождён. □

Лемма 9. *Модуль* M *над нётеровым кольцом* A *нётеров титтк он конечно порождён.*

Доказательство. Если модуль нётеров, то он конечно порождён по определению.

Пусть A нётерово и модуль M над A конечно порождён. Во-первых, A-модуль A нётеров по определению, так как его подмодули – это идеалы в A. Во-вторых, при помощи леммы 8 и точных последовательностей $0 \to A \to A^{\oplus n} \to A^{\oplus n-1} \to 0$ проверяется, что всё свободные модули конечного ранга $A^{\oplus n}$ нётеровы. Наконец, модуль M – фактормодуль свободного модуля конечного ранга, и по лемме 8 он нётеров. □

Следствие 10. *Любой подмодуль в конечно порождённом модуле над нётеровым кольцом конечно порождён.*

Пример 11.

1. Любое кольцо главных идеалов нётерово.
2. В частности, нётеровы $\mathbb{Z}$, k и $\mathsf{k}[x]$, где k – любое поле.
3. Бесконечномерное векторное пространство над k – не нётеров k-модуль.
4. Кольцо $\mathsf{k}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ многочленов от счётного числа переменных не нётерово: идеал $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ не может быть порождён конечным числом многочленов.

Как проверять, что кольцо нётерово? Основной инструмент – следующая теорема (её тоже называют теоремой Гильберта о базисе).

Теорема 12. *Если кольцо* A *нётерово, то и кольцо* $A[x]$ *нётерово.*

Доказательство. Пусть $I \subset A[x]$ – идеал, построим в I конечную систему образующих.

Положим $I_k = \{a \in A \mid \exists f = ax_k + \ldots \in I, \deg f = k\}$, это идеалы в A. Притом $I_k \subset I_{k+1}$: если $f = ax_k + \ldots \in I$ имеет степень k, то $xf = ax_{k+1} + \ldots \in I$ имеет степень $k+1$. Рассмотрим идеал $I_\infty = \cup_k I_k$. Он конечно порожден элементами $a_1, \dots, a_n$, так как A нётерово. Все они находятся в каком-то из идеалов I_N, так как их конечное число. Тогда $I_N = I_{N+1} = \ldots = I_\infty$. Выберем многочлены $f_i = a_i x^N + \ldots \in I_N$ степени N. Рассмотрим A-модуль $M = \{f \in I \mid \deg f < N\}$, это подмодуль в $\{f \mid \deg f < N\} \cong A^N$. По следствию 10, он конечно порождён элементами $g_1, \dots, g_m$.

Покажем, что I порождён $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$. Пусть $f \in I$, ведём индукцию по $n = \deg f$. Если $\deg f < N$, то $f \in M$ и поэтому выражается через g_i с коэффициентами в A. Если $\deg f = n \geqslant N$ и $f = ax^n + \ldots$, то $a \in I_n = I_\infty$, поэтому $a = \sum a_i c_i$, где $c_i \in A$. Тогда многочлен $\bar{f} = x^{n-N} \sum c_i f_i = ax^n + \ldots$ порождён f_i и $\deg(f - \bar{f}) < n$, по предположению индукции $f - \bar{f}$ выражается через f_i и g_j. □

Следствие 13. *Кольца* $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ *и* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ *нётеровы.*

Доказательство. По индукции, используя теорему 12. □

Таким образом, теорема Гильберта о базисе (теорема 6) доказана.

Лемма 14. *Пусть кольцо* A *нётерово, а* B *– факторкольцо кольца* A*. Тогда* B *также нётерово.*

Доказательство. Пусть $I \subset B$ – идеал. Рассмотрим прообраз $p^{-1}I$ при сюръекции $p\colon A \to B$, это идеал в A. Значит, он порождён конечным числом элементов $a_1, \ldots, a_n$, тогда I порождён элементами $p(a_1), \ldots, p(a_n)$. □

Следствие 15.

1. *Любая конечно порождённая алгебра нётерова.*
2. *Алгебра* $\mathsf{k}[X]$ *регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии* X *нётерова.*
3. *Любое подмногообразие в аффинном алгебраическом многообразии* X *может быть задано как множество нулей конечного числа регулярных функций.*

Доказательство. 1. Конечно порождённая n элементами алгебра k – факторалгебра алгебры $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. По лемме 14 она нётерова.

2. Следует из того, что алгебра $\mathsf{k}[X]$ конечно порождена.

3. Следует из 2. в силу конечной порождённости идеала подмногообразия. □

Пример 16. Подкольцо в нётеровом кольце не обязательно нётерово. Рассмотрим подкольцо $A = \mathsf{k}[x, xy, xy^2, xy^3, \ldots]$ в $\mathsf{k}[x, y]$. Идеал $I = \langle x, xy, xy^2, xy^3, \ldots \rangle \subset A$ не может быть порождён конечным числом элементов, следовательно A не нётерово.