# Многочлен Гильберта и теорема Безу

Сегодня мы изучим многочлен Гильберта – основной инвариант замкнутых подмножеств проективного пространства – и докажем с его помощью теорему Безу.

Напомним, что *градуированной алгеброй* называется алгебра $A$ (над некоторым полем $\mathsf{k}$), для которой задано разложение $A = \oplus_{i \geqslant 0} A_i$ такое, что $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

**Определение 1.** *Функцией Гильберта* градуированной алгебры $A_\bullet$ называется функция $f_{A_\bullet} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$f_{A_\bullet}(i) = \dim_{\mathsf{k}} A_i.$$

**Пример 2.** Пусть $A_\bullet = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – алгебра многочленов, тогда

$$f_{A_\bullet}(i) = C_{i+n-1}^{n-1}.$$

**Пример 3.** Пусть $A_\bullet = \mathsf{k}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ – алгебра косых многочленов, тогда

$$f_{A_\bullet}(i) = C_n^i.$$

В дальнейшем, все алгебры будут предполагаться коммутативными.

В определении 1 предполагается, что размерности конечны. На самом деле, это всегда так в интересующих нас примерах.

**Предложение 4.** *Если $A_\bullet$ – конечно порождённая над $\mathsf{k}$ элементами положительной степени градуированная алгебра, то $\dim_k A_i$ конечна.*

*Доказательство.* Пусть $A_\bullet = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – алгебра многочленов от переменных степеней $\deg x_j = d_j > 0$. Тогда $\dim A_i$ – число мономов от $x_j$ однородной степени $i$, оно конечно. Если же $A_\bullet$ – алгебра, конечно порождённая образующими степеней $d_1, \ldots, d_n$, то $A_\bullet$ – фактор алгебры многочленов $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, и $\dim A_i$ ещё меньше. □

Чтобы описать функцию Гильберта для алгебры взвешенных многочленов, полезно рассмотреть соответствующую производящую функцию.

**Определение 5.** *Рядом Пуанкаре* градуированной алгебры $A_\bullet$ называется формальный степенной ряд

$$P_{A_\bullet}(t) = \sum_{i \geqslant 0} f_{A_\bullet}(i) t^i.$$

Нетрудно увидеть, что

$$P_{\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]}(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = (1 + t + t^2 + t^3 + \ldots)^n$$

для обычной алгебры многочленов. Аналогично, для алгебры многочленов от переменных $x_j$ степеней $d_j > 0$ имеем

$$P_{\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]}(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_j}} = \prod_{j=1}^{n} (1 + t^{d_j} + t^{2d_j} + t^{3d_j} \ldots).$$

Помимо алгебр, необходимо рассматривать модули. Напомним, что градуированным модулем над градуированной алгеброй $A_\bullet$ называется модуль $M$ над $A_\bullet$, для которого задано разложение $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ такое, что $A_i M_j \subset M_{i+j}$.

**Определение 6.** *Функцией Гильберта* градуированного модуля $M_\bullet$ называется функция $f_{M_\bullet}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$f_{M_\bullet}(i) = \dim_{\mathsf{k}} M_i.$$

**Предложение 7.** *Если $A_\bullet$ – конечно порождённая над* $\mathsf{k}$ *элементами положительной степени градуированная алгебра, а $M_\bullet$ – конечно порождённый над $A_\bullet$ градуированный модуль, то $\dim_k M_i$ конечна.*

*Доказательство.* Для $M_\bullet = A_\bullet$ или сдвигу $A_\bullet$ по градуировке утверждение доказано. Для свободно конечно порождённого $M_\bullet$ тоже: образующие можно считать однородными, и тогда $M_\bullet$ изоморфен прямой сумме сдвигов $A_\bullet$, и размерности $M_i$ также конечны. Произвольный конечно порождённый $M_\bullet$ – это фактор свободного, и размерности не больше, чем для свободного. □

Модули интересны для геометрии как куски, на которые разрезаются кольца.

**Лемма 8.** *1. Пусть*

$$0 \to M'_\bullet \to M_\bullet \to M''_\bullet \to 0$$

*– точная тройка градуированных модулей (где гомоморфизмы однородны), тогда*

$$f_{M_\bullet} = f_{M'_\bullet} + f_{M''_\bullet}.$$

*2. Пусть*

$$0 \to M^a_\bullet \to M^{a+1}_\bullet \to \ldots \to M^b_\bullet \to 0$$

*– точная последовательность градуированных модулей (где гомоморфизмы также однородны), тогда*

$$\sum_j (-1)^j f_{M^j_\bullet} = 0.$$

*Доказательство.* 1. очевидно, т.к. в точной последовательности $0 \to M'_i \to M_i \to M''_i \to 0$ размерности складываются.

2. следует из 1. по индукции: рассмотрим точные последовательности

$$0 \to M^a_\bullet \xrightarrow{d} M^{a+1}_\bullet \to \operatorname{im} d \to 0$$

и

$$0 \to \operatorname{im} d \to M^{a+2}_\bullet \to \ldots \to M^b_\bullet \to 0,$$

для них известно, что $f_{\operatorname{im} d} = f_{M^{a+1}_\bullet} - f_{M^a_\bullet}$ и $f_{\operatorname{im} d} = \sum_{j=a+2}^{b} (-1)^j f_{M^j_\bullet}$. Приравнивая, получаем то, что нужно. □

Для того, чтобы показать, что функция Гильберта – это многочлен, нам понадобится немного простых сведений о многочленах.

Пусть $F$ – множество функций $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Определим разностный оператор

$$\Delta\colon F \to F, \quad (\Delta f)(i) = f(i+1) - f(i).$$

**Лемма 9.** *1. $\ker \Delta$ состоит из констант.*

*2. Если $f \in \mathbb{Q}[x]$ – многочлен степени $d$, то $\Delta f$ – многочлен степени $d-1$.*

*3. $\Delta$ – сюръекция из многочленов степени $\leqslant n$ в многочлены степени $\leqslant n-1$.*

*4. Если $\Delta f$ – многочлен, то $f$ – многочлен.*

*Доказательство.* 1. Очевидно.

2. Ясно, что если $f(x) = ax^d + bx^{d-1} + \ldots$ – многочлен, то $f(x+1) - f(x)$ – также многочлен, причём

$$f(x+1) - f(x) = a(x+1)^d + b(x+1)^{d-1} + \ldots - (ax^d + bx^{d-1} + \ldots) = \\ = ax^d + adx^{d-1} + bx^{d-1} + \ldots - ax^d - bx^{d-1} + \ldots = adx^{d-1} + \ldots,$$

поэтому $\deg \Delta f = d - 1$.

3. следует из 1. и подсчёта размерностей.

4. Если $\Delta f$ – многочлен, то по 3. найдётся многочлен $g$ такой, что $\Delta g = \Delta f$ Тогда $\Delta(f - g) = 0$ и по 1. $f - g = c$ – константа, поэтому $f$ – многочлен. □

**Предложение 10.** *Если $A_\bullet$ – конечно порождённая над $\mathsf{k}$ элементами степени 1 градуированная алгебра, а $M_\bullet$ – конечно порождённый над $A_\bullet$ градуированный модуль, то найдутся $N \in \mathbb{Z}$ и $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что $f_{M_\bullet}(i) = P(i)$ при $i > N$. Иными словами, функция Гильберта является многочленом.*

*Доказательство.* Пусть $A_\bullet$ порождена $n$ элементами степени 1, тогда найдётся сюръекция алгебр $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \to A$. При этом $M_\bullet$ будет конечно порождённым $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$-модулем. Значит, можно считать, что $A_\bullet = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Докажем утверждение индукцией по $n$.

При $n = 0$ имеем $A = \mathsf{k}$ и конечно порождённый модуль $M_\bullet$ будет конечномерным векторным пространством над $\mathsf{k}$, оно сосредоточено в конечном числе степеней. Тогда $M_i = 0$ при $i$, больших некоторого $N$. Можно взять $P(x) = 0$.

Пусть для $n - 1$ утверждение доказано, и $M_\bullet$ – конечно порождённый над $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ модуль. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to K_\bullet \to M_\bullet \xrightarrow{x_n} M_\bullet \to L_\bullet \to 0,$$

где $K_\bullet$ – ядро умножения на $x_n \colon M_\bullet \to M_\bullet$, а $L_\bullet = M_\bullet / x_n M_\bullet$. Приравнивая размерности, по лемме 8 получаем:

$$f_{K_\bullet}(i) - f_{M_\bullet}(i) + f_{M_\bullet}(i+1) - f_{L_\bullet}(i+1) = 0,$$
$$(\Delta f_{M_\bullet})(i) = f_{M_\bullet}(i+1) - f_{M_\bullet}(i) = f_{L_\bullet}(i+1) - f_{K_\bullet}(i).$$

Умножение на $x_n$ действует нулём на $K_\bullet$ и на $L_\bullet$, поэтому их можно считать конечно порождёнными над $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ модулями. Значит, по предположению индукции, $(\Delta f_{M_\bullet})(i) = f_{L_\bullet}(i+1) - f_{K_\bullet}(i)$ – многочлен при больших $i$. По лемме 9, получаем, что и $f_{M_\bullet}(i)$ – многочлен при больших $i$. □

Ясно, что многочлен Гильберта принимает только целые значения при больших значениях переменной $x$. В действительности, он принимает целые значения при всех целых $x$. Изучим такие многочлены.

**Определение 11.** Многочлен $P$ над полем характеристики ноль называется *целозначным*, если $P(x) \in \mathbb{Z}$ при всех $x \in \mathbb{Z}$.

Ясно, что все многочлены с целыми коэффициентами целозначны, но не только они. Например, целыми всегда будут значения многочлена $x(x+1)/2$.

**Предложение 12.** *1. Многочлены*

$$C_x^j = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-j+1)}{j!}$$

*при $j \geqslant 0$ образуют базис целозначных многочленов как $\mathbb{Z}$-модуля.*

*2. Если $P(x)$ – целозначный многочлен степени $d$, то $P(x) = m\frac{x^d}{d!} + \dots$, где $m \in \mathbb{Z}$.*

*Доказательство.* 1. Во-первых, $C_x^j$ – действительно целозначный многочлен. Делимость $x(x-1)(x-2)\dots(x-j+1)$ на $j!$ зависит только от остатка $x$ по модулю $j!$, а при больших $x$ значения $C_x^j$ натуральные – это числа сочетаний из $x$ по $j$.

Далее, $\deg C_x^j = j$, поэтому многочлены $C_x^j$ образуют базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]$. Пусть $P(x) = \sum_{j=0}^n c_j C_x^j$ и $P(x)$ целозначный, покажем индукцией по $\deg P$, что $c_j \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $\Delta C_x^j = C_{x+1}^j - C_x^j = C_x^{j-1}$, это стандартное комбинаторное тождество. Оно объясняет, чем хорош базис из многочленов $C_x^j$.

При $\deg P = 0$ имеем $P = c \in \mathbb{Z}$ и $C_x^0 = 1$, так что $c_0 = c = 1 \in \mathbb{Z}$. При $\deg P = n$ имеем

$$(\Delta P)(x) = \sum_{j=0}^n c_j \Delta C_x^j = \sum_{j=1}^n c_j C_x^{j-1}.$$

Так как $\Delta P$ – целозначный многочлен степени $n-1$, то $c_j \in \mathbb{Z}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ по предположению индукции. Также $c_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.

2. Следует из 1.: запишем $P = \sum_{j=0}^n c_j C_x^j$ и посмотрим на члены с $x^n$. Получим $c_n \frac{1}{n!}$, причём $c_n \in \mathbb{Z}$. □

Отметим, что любой целозначный многочлен степени $n$ имеет рациональные коэффициенты со знаменателем, делящим $n!$.

**Определение 13.** Пусть $M_\bullet$ – конечно порождённый модуль над алгеброй многочленов. Определим

$$d(M_\bullet) = d \quad \text{и} \quad m(M_\bullet) = m, \quad \text{где} \quad f_{M_\bullet}(x) = m\frac{x^d}{d!} + \dots$$

– многочлен Гильберта $M_\bullet$.

Эти инварианты $d$ и $m$ модуля имеют геометрический смысл.

Будет считать в дальнейшем, что поле $\mathsf{k}$ алгебраически замкнуто.

Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – проективное подмногообразие. Напомним, однородным идеалом $X$ называется идеал $I(X)$ в $\mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]$, образованный многочленами, все однородные компоненты которых равны нулю на $X$. Однородным координатным кольцом $X$ называется факторалгебра $S_\bullet(X) = \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]/I(X)$.

**Определение 14.** Определим многочлен Гильберта $f_X$ и числа $d(X)$ и $m(X)$ как соответствующие величины для алгебры $S_\bullet(X)$. Число $m(X)$ называется *степенью* проективного многообразия $X$.

В действительности, $d(X)$ совпадает с размерностью $X$, а $m(X)$ – кратность пересечения $X$ с достаточно общим гиперпространством в $\mathbb{P}^n$ коразмерности $\dim X$. Чтобы это увидеть, посмотрим, как меняются $d(X)$ и $m(X)$ при пересечении $X$ гиперплоскостью.

**Предложение 15.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – замкнутое подмногообразие, а $H \subset \mathbb{P}^n$ – достаточно общая гиперплоскость. А именно, $H$ не содержит ни одной неприводимой компоненты $X$ и пересекается с $X$ без кратностей. Тогда $d(X \cap H) = d(X) - 1$, $m(x \cap H) = m(X)$.*

*Доказательство.* Пусть $H$ задана уравнением $l(x) = 0$, а $I(X)$ – однородный идеал $X$. Тогда пересечение $X \cap H$ задано идеалом $(I(x), l)$. Предположим, что он радикален, т.е. совпадает с идеалом пересечения $X \cap H$. Это и есть предположение об общности положения $H$, т.к. означает, что при пересечении нет кратностей. Тогда имеется точная последовательность градуированных модулей

$$0 \to S_\bullet(X) \xrightarrow{l} S_\bullet(X) \to S_\bullet(X \cap H) \to 0.$$

Действительно, умножение на $l(x)$ инъективно на $S_\bullet(X)$, так как $l(x)$ – ненулевая форма на каждой неприводимой компоненте $X$. Это не однородный гомоморфизм, он повышает градуировку на 1. Правая стрелка сюръективна, так как

$$S_\bullet(X)/l = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]/(I(X), l) = \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n]/I(X \cap H).$$

Вычислим размерности, получим: $f_{X\cap H}(i) = f_X(i) - f_X(i-1)$. Пусть $f_X(x) = mx^d/d! + bx^{d-1}/(d-1)! + \ldots$, тогда

$$f_{X\cap H}(i) = mi^d/d! + bi^{d-1}/(d-1)! + \ldots - (m(i-1)^d/d! + b(i-1)^{d-1}/(d-1)! + \ldots) = \\ = mdi^{d-1}/d! + \ldots = mi^{d-1}/(d-1)! + \ldots$$

Откуда получаем требуемое. □

Напомним, что размерностью приводимого многообразия $X$ называется максимальная размерность неприводимых компонент $X$.

**Предложение 16.** *Если $X \subset \mathbb{P}^n$ – подмногообразие размерности $d$, то $d(X) = d$, а пересечение $X$ с достаточно общим подпространством коразмерности $d$ состоит из $m(X)$ точек.*

*Доказательство.* Выберем достаточно общую гиперплоскость как в предложении 15. Как мы доказывали, $\dim X \cap H = d - 1$. Сделаем так $d$ раз, получим многообразие $Z$ размерности нуль, т.е. конечный набор точек $P_1, \ldots, P_r$. Вычислим для него $d(Z)$ и $m(Z)$. Пусть $S_i(Z)$ – однородные формы степени $i$ по модулю форм, равных нулю на $Z$. При больших $i$ условия на обращение формы степени $i$ в нуль в точках $P_j$ линейно независимы, поэтому $S_i(Z) \cong \mathsf{k}^r$, многочлен Гильберта равен константе $r$. Следовательно, $d(Z) = 0$, $m(Z) = r$. Из предложения 15 получаем: $d(X) = d(Z) + d = d$, $r = m(X)$. При этом последовательное пересечение $X$ с $d$ гиперплоскостями $Z$ и есть пересечение $X$ общим подпространством коразмерности $d$, оно содержит $m(X)$ точек. □

Имеет место следующий факт: если $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое подмногообразие размерности $n$, то все компоненты пересечения $X$ с гиперповерхностью $H = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$, не содержащей $X$, имеют размерность $n-1$. Его мы примем на веру. Раньше мы доказывали более слабое утверждение: что максимальная размерность компоненты равна ровно $n-1$.

Используя это доказательство предложения 15, несложно убедиться в следующем:

**Замечание 17.** Если пересекать $X$ гиперплоскостями недостаточно общего положения, то либо будет $\dim Z > 0$, либо число точек в $Z$ будет меньше, чем $m(X)$.

Для того, чтобы сформулировать теорему Безу, необходимо научиться считать кратности пересечения.

Мы сопоставим кратности компонентам аффинного многообразия $X$, заданного как множество нулей многочленов из произвольного идеала $I \subset \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Как несложно видеть, неприводимые компоненты $Z_j$ многообразия $X$ соответствуют минимальным простым идеалам $\mathfrak{p}_j$ среди идеалов, содержащих $I$. Это – минимальные простые идеалы, ассоциированные с $I$, в смысле листка 5. Сейчас мы получим другое их описание, в более широком контексте. Доказательства большинства утверждений будут пропущены и перенесены в листок.

Для любого конечно порождённого модуля $M$ над кольцом многочленов $A = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ существует такая фильтрация подмодулями $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_s = M$, что факторы $M_j/M_{j-1}$ изоморфны $A/\mathfrak{p}_j$, где $\mathfrak{p}_j \subset A$ – простые идеалы. Она не единственна, и её длина не единственна. Но если в последовательности идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ рассмотреть минимальные, то их множество не зависит от выбора фильтрации. Для такого минимального $\mathfrak{p}_j$ количество раз, которое он встречается в последовательности, также не зависит от фильтрации, и называется кратностью $\mathfrak{p}_j$ в модуле $M$.

Если в качестве $M$ взять $A$-модуль $A/I$, то множество минимальных простых идеалов $\mathfrak{p}_j$, происходящих из фильтрации, совпадает с множеством минимальных ассоциированных идеалов, т.е. множеством идеалов неприводимых компонент многообразия $V(I)$. При этом кратность такого идеала $\mathfrak{p}_j$ в модуле $A/I$ называется кратностью компоненты $V(\mathfrak{p}_j)$ многообразия, заданного идеалом $I$.

**Пример 18.** Если $I = \mathfrak{p}$ – простой, то есть очевидная фильтрация для $A/I$ из одного члена, и кратность единственной компоненты $V(\mathfrak{p})$ равна 1.

Если $I = \cap p_j$ – пересечение попарно не вложенных простых идеалов, то можно показать, что кратности всех $V(\mathfrak{p}_j)$ равны 1.

Часто естественные конструкции, исходящие из многообразий без кратностей (т.е., радикальных идеалов), дают многообразия с кратностями (т.е., не радикальные идеалы). Например, сумма радикальных идеалов не обязательно радикальна, поэтому возникают кратности при пересечении подмногообразий. Назовём кратностью $i_Z(X, Y)$, с которой входит неприводимая компонента $Z$ в пересечение $X \cap Y$, кратность идеала $I(Z)$ в модуле $A/(I(X) + I(Y))$.

Другой пример – прообраз подмногообразия при регулярном отображении. Алгебраически, это соответствует взятию образа идеала $I \subset A$ при гомоморфизме колец $p\colon A \to B$. Если $I$ радикален, то $p(I)B$ не обязательно радикален, поэтому при взятии прообраза возникают кратности.

Аналогично определяются кратности для однородных идеалов, соответствующих проективным подмногообразиям.

**Предложение 19 (теорема Безу).** *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое проективное многообразие размерности $k$ и степени $m$. Пусть $H \subset \mathbb{P}^n$ – гиперповерхность, множество нулей однородного многочлена $F \in \mathsf{k}[x_0, \ldots, x_n] = A$ степени $d$, не содержащая $X$. Тогда верно равенство*

$$md = \sum_j i_{Z_j}(X, H) m(Z_j),$$

*где сумма берётся по всем неприводимым компонентам $Z_j$ пересечения $X \cap H$.*

*Доказательство.* Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to S_\bullet(X) \xrightarrow{F} S_\bullet(X) \to A/(I(X), F) \to 0.$$

Вычисляя многочлен Гильберта, получаем $f_{A/(I(X),F)}(x) = f_X(x) - f_X(x - d)$. Преобразуем обе части.

Во-первых, модуль $M = A/(I(X), F)$ имеет фильтрацию градуированными подмодулями $M_a$, где $M_a/M_{a-1} \cong A/\mathfrak{p}_a$ с простыми однородными $\mathfrak{p}_a$. По лемме 8 отсюда следует, что $f_M = \sum f_{M_a/M_{a-1}}$. Минимальные из идеалов $\mathfrak{p}_a$ отвечают неприводимым компонентам $Z_j \subset X \cap H$, размерность каждой из них $k-1$. Для такого идеала

$$\deg f_{M_a/M_{a-1}} = \deg f_{A/\mathfrak{p}_a} = \dim Z_j = k-1 \quad \text{и} \quad m(M_a/M_{a-1}) = m(A/\mathfrak{p}_j) = m(Z_j).$$

Для неминимальных идеалов $\mathfrak{p}_a$ множество $V(\mathfrak{p}_a)$ строго вложено в некоторую компоненту $Z \subset X \cap H$, поэтому

$$\deg f_{M_a/M_{a-1}} = \dim V(\mathfrak{p}_a) < \dim Z = k-1.$$

Вычисляя коэффициент при $x^{k-1}$ в $f_M$, получаем $\frac{1}{(k-1)!}\sum_j m(Z_j) i_{z_j}(X,H)$, так как неминимальные простые идеалы из $\mathfrak{p}_a$ вносят нулевой вклад, а каждый минимальный $\mathfrak{p}_a = I(Z_j)$ встречается $i_{Z_j}(X,H)$ раз.

С другой стороны, вычислим коэффициент при $x^{k-1}$ в $f_X(x) - f_X(x-d)$. Если $f_X(x) = mx^k/k! + bx^{k-1}/(k-1)! + \ldots$, то

$$f_X(x) - f_X(x-d) = mx^k/k! + bx^{k-1}/(k-1)! + \ldots - (m(x-d)^k/k! + b(x-d)^{k-1}/(k-1)! + \ldots) = \\ = mkdx^{k-1}/k! + \ldots = mdx^{k-1}/(k-1)! + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты, получаем нужное равенство. □

**Следствие 20 (теорема Безу для плоских кривых).** *Пусть $X, H \subset \mathbb{P}^2$ – кривые степеней $m$ и $d$ соответственно. Тогда*

$$md = \sum_{P \in X \cap H} i_P(X,H),$$

*где сумма берётся по всем точкам пересечения $X$ и $H$.*