Полупростые алгебры и расширение скаляров

В этой последней лекции мы оставим алгебраическую геометрию и изучим поведение алгебр при расширении скаляров.

Определение 1. Напомним, что *центром кольца* A называется множество его элементов, коммутирующих со всеми элементами:

$$Z(A) = \{a \in A \mid \forall x \in A \ ax = xa\}.$$

Это подкольцо в A.

Кольцом над коммутативным кольцом K называется ассоциативное кольцо с единицей A вместе с гомоморфизмом колец $f\colon K \to A$ таким, что $\operatorname{im} f$ лежит в центре A.

Определение 2. Пусть A и B – кольца над K. Определим на модуле $A \otimes_K B$ умножение равенством

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

Таким образом, $A \otimes_K B$ становится ассоциативным кольцом, единицей в нём служит $1_A \otimes 1_B$. Гомоморфизм $K \to A \otimes_K B\colon x \mapsto f(x) \otimes 1_B$ превращает $A \otimes_K B$ в кольцо над K.

Пример 3.

1. $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n] \otimes_{\mathsf{k}} A \cong A[x_1, \ldots, x_n]$, где A – коммутативная алгебра над k.
2. $M_n(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} A \cong M_n(A)$, где A – алгебра над k.
3. Если $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathsf{k}}$ и $Y \subset \mathbb{A}^m_{\mathsf{k}}$ – алгебраические подмножества, то $X \times Y \subset \mathbb{A}^{m+n}$ – тоже алгебраическое подмножество, и $\mathsf{k}[X \times Y] \cong \mathsf{k}[X] \otimes_{\mathsf{k}} \mathsf{k}[Y]$.
4. Если I, J – идеалы в коммутативном кольце A, то $A/I \otimes_A A/J \cong A/(I + J)$.

Предложение 4. *Пусть A, B – коммутативные кольца над K. Тогда $A \otimes_K B$ – корасслоенное произведение A и B над K в категории коммутативных колец.*

Доказательство. Пусть $f\colon K \to A$ и $g\colon K \to B$ – структурные гомоморфизмы. Определим гомоморфизмы $f'\colon A \to A \otimes_K B$ и $g'\colon B \to A \otimes_K B$: $f'(a) = a \otimes 1$ и $g'(b) = 1 \otimes b$. Очевидно, $f'f = g'g$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "f'"] \arrow[drr, "s"] & & \\
K \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A \otimes_K B \arrow[r, dashed, "p"] & T \\
 & B \arrow[ur, "g'"] \arrow[urr, "t"'] & &
\end{tikzcd}$$

Нужно показать, что для любой пары гомоморфизмов $s\colon A \to T$ и $t\colon B \to T$ в коммутативное кольцо T таких, что $sf = tg$, найдётся единственный гомоморфизм $p\colon A \otimes_K B \to T$, для которого $s = pf'$ и $t = pg'$. Действительно, определим p билинейным равенством $p(a \otimes b) = s(a)t(b)$. Проверка линейности: для $x \in K$ имеем

$$p(ax \otimes b) = s(ax)t(b) = s(a)s(f(x))t(b) = s(a)t(g(x))t(b) = s(a)t(xb) = p(a \otimes xb).$$

Проверка того, что p гомоморфизм:

$$p((a \otimes b)(a' \otimes b')) = p(aa' \otimes bb') = s(aa')t(bb') = s(a)s(a')t(b)t(b') = s(a)t(b)s(a')t(b') = p(a \otimes b)p(a' \otimes b').$$

Ясно, что такой p единственный. $\square$

Следствие 5. *В категории аффинных алгебраических многообразий над* $\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}}$ *существует расслоенные произведения.*

Доказательство. Как мы знаем, категория аффинных алгебраических многообразий над k эквивалентна категории, двойственной категории конечно порождённых над k коммутативных алгебр без нильпотентов. При такой двойственности расслоенные произведения переходят в корасслоенные произведения. Поэтому надо показать, что в категории конечно порождённых над k коммутативных алгебр без нильпотентов существуют корасслоенные произведения. Несложно видеть, что в этой категории корасслоенным произведением $f\colon K \to A$ и $g\colon K \to B$ будет факторкольцо $A \otimes_K B$ по идеалу, образованному нильпотентами. □

Следствие 6. *Если* $X \to Z$ *и* $Y \to Z$ *– пара регулярных отображений аффинных алгебраических многообразий, то* $\mathsf{k}[X \times_Z Y] \cong (\mathsf{k}[X] \otimes_{\mathsf{k}[Z]} \mathsf{k}[Y])/N$, *где* N *– идеал, образованный нильпотентами в* $\mathsf{k}[X] \otimes_{\mathsf{k}[Z]} \mathsf{k}[Y]$.

В алгебре и геометрии часто встречается ситуация, когда теория строится над фиксированным полем k (или кольцом A).

Пример 7.
1. векторные пространства над k;
2. линейные операторы на векторном пространстве над k;
3. билинейные формы на векторном пространстве над k;
4. линейные представления некоторой группы над k;
5. алгебраические многообразия над k;
6. алгебры над k;
7. модули над алгеброй над k.

При этом расширению полей $\mathsf{k} \subset K$ соответствует операция, сопоставляющая объекту над k объект над K. Она называется *расширением скаляров.*

В приведённых выше примерах 1-4,7 эта операция – тензорное умножение векторного пространства V на K над k и взятие индуцированных данных на $V \otimes_{\mathsf{k}} K$. В примере 5 – это множество решений системы уравнений над k в поле K. В примере 6 – это тензорное умножение алгебр.

Говоря более аккуратно, во всех подобных примерах есть категория $\mathcal{C}_{\mathsf{k}}$, образованная объектами определённого вида над полем k. И для каждого расширения полей $\mathsf{k} \subset K$ имеется функтор $F_{K/\mathsf{k}}\colon \mathcal{C}_{\mathsf{k}} \to \mathcal{C}_K$. Объекты в $\mathcal{C}_K$, лежащие в образе функтора $F_{K/\mathsf{k}}$ (или изоморфные им), называются *определёнными над* k.

Естественные вопросы, возникающие в разных теориях, где есть расширение скаляров, таковы: какие объекты над K определены над каким меньшим полем k? Как описать все объекты в $\mathcal{C}_{\mathsf{k}}$, дающие один и тот же объект в K при расширении скаляров? Как правило, теория для алгебраически замкнутого поля устроена сравнительно просто (ЖНФ, теория представлений, алгебраические многообразия), и изучать объекты над алгебраически не замкнутым полем удобно, расширяя скаляры и смотря, что происходит. Поэтому задача классификации объектов над k сводится к двум: классифицировать объекты над $\bar{\mathsf{k}}$ и описать все объекты над k, дающие заданный объект над $\bar{\mathsf{k}}$.

Алгебраические многообразия над k, дающие при расширении скаляров некоторое многообразие X, называются k-формами многообразия X.

Пример 8. Можно показать, что все вещественные формы проективной прямой – это $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ и коника, заданная уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ в $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Отметим, что в примерах 1,2,4 выше неизоморфные объекты остаются неизоморфными при расширении скаляров, а в примерах 3,5,6,7 это не всегда так.

В оставшейся части лекции мы изучим, как ведут себя алгебры при расширении скаляров.

Под алгебрами в дальнейшем мы будем иметь в виду конечномерные ассоциативные алгебры с единицей над некоторым полем k. Для конечномерных алгебр модули над алгеброй иногда называют также представлениями алгебры.

Напомним, что алгебра A называется полупростой, если любой A-модуль есть прямая сумма простых подмодулей. Алгебра называется простой, если в ней нет нетривиальных двусторонних идеалов. Алгебра называется телом, или алгеброй с делением, если в ней у любого ненулевого элемента есть обратный элемент.

Мы доказывали в прошлом семестре, что любая полупростая алгебра изоморфна алгебре вида

$$\prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(D_i),$$

где D_i – тела, а любая простая алгебра изоморфна одной алгебре матриц над телом (в частности, полупроста). Любая алгебра с делением проста. Все простые модули над $\prod_{i=1}^n M_{n_i}(D_i)$ – это модули столбцов $P_i = D_i^{n_i}$, их конечное число. Эндоморфизмы модуля P_i – тело D_i^{op}, т.е. D_i с умножением в другом порядке. В частности, простая алгебра – то же, что полупростая с единственным простым модулем.

Как устроены модули над алгеброй матриц?

Предложение 9. *Пусть A – алгебра. Тогда любой модуль над $M_n(A)$ имеет вид N^n (столбцы), где N – некоторый A-модуль.*

Доказательство. Пусть V – модуль над $M_n(A)$. Идемпотенты матричные единицы $E_{ii} \in M_n(A)$ задают разложение V в прямую сумму подпространств $V_i = E_{ii}V \subset V$. Каждое из них является A-модулем. А матричные единицы E_{ij} переставляют эти A-модули, т.е. они все изоморфны, обозначим их N. Теперь ясно, что $V \cong N^n$ как модуль столбцов. $\square$

Определение 10. Алгебры A и B называются *Морита-эквивалентными*, если категории модулей $A-\mathrm{mod}$ и $B-\mathrm{mod}$ эквивалентны.

Пример 11. Предложение 9 означает, что алгебры A и $M_n(A)$ Морита-эквивалентны: мы видели, что задание A-модуля равносильно заданию $M_n(A)$-модуля. Также можно проверить, что морфизмы $M_n(A)$-модулей однозначно определяются морфизмом соответствующих A-модулей.

Посмотрим на представления полупростых алгебр с точки зрения теории категорий.

Предложение 12. *Полупростота и простота алгебры определяются по её категории представлений. По категории представлений простой алгебры $M_n(D)$ восстанавливается тело D, но не порядок n.*

Доказательство. В терминах категории модулей можно говорить об инъективности и сюръективности гомоморфизма, а значит, о наличии подмодулей и о простоте модуля. Таким образом, понятие полупростоты алгебры зависит только от категории модулей:

любой модуль должен быть прямой суммой простых. Простые алгебры выделяются среди полупростых как имеющие единственный с точностью до изоморфизма простой модуль. Если $A = M_n(D)$, то D вычисляется как $\mathrm{End}(P)^{op}$, где P – простой модуль. Так как алгебры $M_n(D)$ Морита-эквивалентны при разных n, определить n по категории модулей нельзя. $\square$

Заметим, что матричные алгебры сохраняются при расширении скаляров:

Лемма 13. *$M_n(A) \otimes_{\mathsf{k}} B \cong M_n(A \otimes_{\mathsf{k}} B)$, где A и B – k-алгебры. В частности, $M_n(A) \cong M_n(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} A$.*

Доказательство. Очевидно. $\square$

Лемма 14. *Для поля k имеем изоморфизм алгебр $M_n(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} M_m(\mathsf{k}) \cong M_{mn}(\mathsf{k})$.*

Доказательство. Имеем

$$M_n(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} M_m(\mathsf{k}) \cong \mathrm{End}(\mathsf{k}^n) \otimes \mathrm{End}(\mathsf{k}^m) \cong \mathrm{End}(\mathsf{k}^n \otimes \mathsf{k}^m) \cong \mathrm{End}(\mathsf{k}^{mn}) \cong M_{mn}(\mathsf{k}),$$

где изоморфизм $\mathrm{End}(\mathsf{k}^n) \otimes \mathrm{End}(\mathsf{k}^m) \to \mathrm{End}(\mathsf{k}^n \otimes \mathsf{k}^m)$ определён правилом $(F \otimes G)(x \otimes y) = F(x) \otimes G(y)$. Здесь $F \in \mathrm{End}(\mathsf{k}^n)$, $G \in \mathrm{End}(\mathsf{k}^m)$, $x \in \mathsf{k}^n$, $y \in \mathsf{k}^m$. $\square$

Как описать все полупростые алгебры над k? Ясно, что для этого надо описать все тела над k. Здесь есть два крайних случая: коммутативные тела, т.е. расширения полей $\mathsf{k} \subset K$, и “максимально некоммутативные” тела, т.е. такие тела $\mathsf{k} \subset D$, что $\mathsf{k} = Z(D)$. Коммутативные расширения изучает теория Галуа, о некоммутативных мы сегодня поговорим.

Определение 15. Алгебра A над k называется *центральной*, если k совпадает с центром $Z(A)$ алгебры A.

Пусть A – алгебра над полем k, а $\mathsf{k} \subset K$ – расширение полей. Тогда кольцо $A \otimes_{\mathsf{k}} K$ является K-алгеброй, это расширение алгебры A. Какие свойства алгебр сохраняются при расширении скаляров? Рассмотрим сначала случай, когда A – поле.

Предложение 16. *Если поле A – конечное сепарабельное расширение поля k,а $\mathsf{k} \subset K$ – ещё расширение, то $A \otimes_{\mathsf{k}} K$ – прямое произведение нескольких расширений поля K.*

Доказательство. По лемме о примитивном элементе, A порождено над k одним сепарабельным элементом α. Пусть $f \in \mathsf{k}[x]$ – его минимальный многочлен и пусть $f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_m$ – разложение f на неприводимые множители в $K[x]$. Тогда все f_i попарно взаимно просты (f сепарабелен), и по китайской теореме об остатках

$$A \otimes_{\mathsf{k}} K \cong \mathsf{k}[x]/(f) \otimes_{\mathsf{k}} K = K[x]/(f) \cong \prod_{i=1}^{m} K[x]/(f_i).$$

При этом поля $K[x]/(f_i)$ – конечные расширения K, полученные присоединением корня многочлена f_i. $\square$

Теперь рассмотрим алгебры более общего вида.

Предложение 17. *При расширении основного поля:*

1. *Полупростые алгебры остаются полупростыми при сепарабельном расширении.*

2. *Простые алгебры не обязательно остаются простыми.*

3. *Центральные алгебры остаются центральными.*

4. *Тела не обязательно остаются телами.*

Доказательство. Контрпримеры к 2 и 4: при расширении $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ алгебра $\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ становится алгеброй $\mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \mathbb{C}[x]/((x+i)(x-i)) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Проверим 3. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис центральной алгебры A над k. Тогда элемент $x = \sum x_i e_i$ лежит в центре A титтк $xe_j = e_j x$ при всех j, это линейные условия на x_i. Очевидно, $e_1, \ldots, e_n$ – базис $A \otimes_{\mathsf{k}} K$ над K, и те же уравнения определяют центр в $A \otimes_{\mathsf{k}} K$. Размерность пространства решений системы линейных уравнений выражается через ранг матрицы системы и не зависит от основного поля. Так как центр A над k одномерен, то и центр $A \otimes_{\mathsf{k}} K$ над K одномерен, значит $Z(A \otimes_{\mathsf{k}} K) = K$.

1 мы докажем чуть позже. □

Лемма 18. *Пусть D – тело над полем k, а A – конечномерная k-алгебра. Тогда любой двусторонний идеал в $D \otimes_{\mathsf{k}} A$ порождён некоторым подмножеством в $Z(D) \otimes_{\mathsf{k}} A$.*

Доказательство. Пусть $I \subset D \otimes_{\mathsf{k}} A$ – двусторонний идеал. Рассмотрим I и $D \otimes_{\mathsf{k}} A$ как левые и как правые D-модули. Выбрав в A конечный базис $e_1, \ldots, e_n$ над k, получим изоморфизм $D \otimes_{\mathsf{k}} A \cong D^n$. Модули над телом устроены так же, как и векторные пространства над полем. Поэтому найдётся такое подмножество базисных векторов (можно считать с точность до перенумерации, что это $e_1, \ldots, e_m$), что проекция $I \to D^m$ на подмодуль, порождённый этими векторами, будет изоморфизмом левых и правых D-модулей. Пусть $v_1, \ldots, v_m \in I$ – прообразы e_j. Тогда $xv_i = v_i x$ для всех $i \leqslant m$ и $x \in D$, т.к. $xe_i = e_i x$. Значит, все коэффициенты в разложении $v_i = \sum v_{ij} e_j$ лежат в центре D, т.е. $v_i \in Z(D) \otimes A$. Итак, I порождён векторами v_i из $Z(D) \otimes A$, что и требовалось. □

Доказательство предложения 17.1. Пусть A – полупростая алгебра над k и $\mathsf{k} \subset K$ – сепарабельное расширение полей. Пусть $A \cong \prod M_{n_i}(D_i)$, тогда

$$A \otimes_{\mathsf{k}} K \cong \prod M_{n_i}(D_i) \otimes_{\mathsf{k}} K \cong \prod M_{n_i}(D_i \otimes_{\mathsf{k}} K) \cong \prod M_{n_i}(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} (D_i \otimes_{\mathsf{k}} K).$$

Вычислим $D \otimes_{\mathsf{k}} K$, где D – тело над k. Рассмотрим поле $F = Z(D)$. По предложению 16, $F \otimes_{\mathsf{k}} K \cong \prod F_j$, где F_j – поля над F. Далее,

$$D \otimes_{\mathsf{k}} K \cong D \otimes_F (F \otimes_{\mathsf{k}} K) \cong D \otimes_F \prod F_j \cong \prod D \otimes_F F_j.$$

Покажем, что алгебра $D \otimes_F F_j$ проста. По лемме 18 любой двусторонний идеал в $D \otimes_F F_j$ порождён множеством элементов в $Z(D) \otimes_F F_j = F \otimes_F F_j = 1 \otimes F_j$. Эти элементы порождают как двусторонний идеал всё F_j (т.к. это поле), а значит и всю алгебру $D \otimes_F F_j$, и идеал тривиальный.

Итак, $D_i \otimes K$ – полупростая алгебра, она изоморфна $\prod_j M_{n_{ij}}(D_{ij})$, где D_{ij} – тела над K. Получаем:

$$A \otimes_{\mathsf{k}} K \cong \prod M_{n_i}(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} (D_i \otimes_{\mathsf{k}} K) \cong \prod_i M_{n_i}(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} \left(\prod_j M_{n_{ij}}(D_{ij}) \right) \cong$$
$$\cong \prod_{ij} M_{n_i}(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} M_{n_{ij}}(\mathsf{k}) \otimes_{\mathsf{k}} D_{ij} \cong \prod_{ij} M_{n_i n_{ij}}(\mathsf{k})(D_{ij}),$$

т.е. полупростую алгебру. □

Нетрудно видеть, что полупростые центральные алгебры автоматически простые. Поэтому простая центральная алгебра при сепарабельном расширении основного поля остаётся простой центральной алгеброй. Можно показать, что любая простая центральная алгебра при подходящем расширении основного поля $\mathsf{k} \subset K$ становится изоморфна алгебре матриц над K. В таком случае говорят, что A *расщепляется* над K.

Класс простых центральных алгебр интересен ещё тем, что их можно перемножать друг с другом.

Лемма 19. $Z(A \otimes_{\mathsf{k}} B) = Z(A) \otimes_{\mathsf{k}} Z(B)$.

Доказательство. Ясно, что $Z(A \otimes_{\mathsf{k}} B) \supset Z(A) \otimes_{\mathsf{k}} Z(B)$, проверим обратное. Пусть $x \in Z(A \otimes_{\mathsf{k}} B)$ и $e_1, \ldots, e_n$ – базис B над k. Запишем $x = \sum c_i \otimes e_i$. Так как $ax = xa$ при всех $a \in A$, то $ac_i = c_i a$ при всех $a \in A$, значит $c_i \in Z(A)$. Поэтому $x \in Z(A) \otimes B$. Повторяя ещё раз это рассуждение, получим, что $x \in Z(A) \otimes Z(B)$. □

Определение 20. Обозначим через $\mathrm{Br}(\mathsf{k})$ множество классов простых центральных алгебр над полем k относительно Морита-эквивалентности.

Отметим, что простые центральные алгебры над k – это матричные алгебры над центральными телами над k, причём две такие алгебры Морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда они суть матричные алгебры над одним и тем же телом. Т.е., класс эквивалентности состоит из алгебр $D, M_2(D), M_3(D), \ldots$, где D – некоторое тело над k. В каждом классе есть единственное тело, поэтому множество $\mathrm{Br}(\mathsf{k})$ биективно множеству центральных тел над k.

Определим бинарную операцию на $\mathrm{Br}(\mathsf{k})$ правилом $(A, B) \mapsto A \otimes_{\mathsf{k}} B$.

Предложение 21. *Эта операция корректно определена и превращает* $\mathrm{Br}(\mathsf{k})$ *в коммутативную группу.*

Доказательство. Во-первых, покажем что если A и B – простые центральные алгебры над k, то и алгебра $A \otimes_{\mathsf{k}} B$ простая центральная.

То, что алгебра $A \otimes_{\mathsf{k}} B$ центральная, вытекает из леммы 19. Проверим, что простая, при этом будем сначала считать, что A – тело. Пусть $I \subset A \otimes_{\mathsf{k}} B$ – двусторонний идеал. По лемме 18, I порождён некоторым подмножеством в $Z(A) \otimes_{\mathsf{k}} B = 1 \otimes B$. Так как B проста, это подмножество порождает $1 \otimes B$, а значит и $A \otimes B$. Если A – алгебра матриц над телом, то воспользуемся рассуждением следующего абзаца.

Во-первых, проверим корректность: если A Морита-эквивалентна A', то $A \otimes B$ Морита-эквивалентна $A' \otimes B$. Действительно, $A \cong M_n(D)$ и $A' \cong M_m(D)$, тогда $A \otimes B \cong M_n(D) \otimes B \cong M_n(D \otimes B)$. Как мы видели выше, $D \otimes B$ – простая алгебра, она имеет вид $M_l(D')$ для некоторого тела D'. Поэтому $A \otimes B \cong M_n(M_l(D')) \cong M_{nl}(D')$ и аналогично $A' \otimes B \cong M_{ml}(D')$.

Ассоциативность и коммутативность тензорного умножения очевидна.

Покажем существование обратного элемента. А именно, что обратной к алгебре A будет алгебра A^{op}, т.е. что $A \otimes A^{op} \cong M_n(\mathsf{k})$, где $n = \dim_{\mathsf{k}} A$. Действительно, определим действие алгебры $A \otimes A^{op}$ на векторном пространстве A. Положим

$$(a \otimes b)x = axb,$$

при этом

$$(a \otimes b)(a' \otimes b')x = aa'xb'b = (aa' \otimes b'b)x = ((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b'))x,$$

так что A становится $A \otimes A^{op}$-модулем.

Получили гомоморфизм алгебр $A \otimes A^{op} \to \mathrm{End}_{\mathsf{k}}(A)$. Его ядро – двусторонний идеал в простой алгебре $A \otimes A^{op}$ и потому нулевое. Обе стороны имеют размерность n^2, поэтому этот гомоморфизм – изоморфизм, что и нужно. $\square$

Группа $\mathrm{Br}(\mathsf{k})$ называется *группой Брауэра* поля k. Она описывает устройство тел над заданным полем.

Пример 22.

1. $\mathrm{Br}(\mathsf{k}) = 0$ для любого алгебраически замкнутого поля k;
2. $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_p) = 0$ для конечного поля $\mathbb{F}_p$ (другими словами, любое тело над конечным полем коммутативно, это называется теорема Веддербёрна);
3. $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Действительно, теорема Фробениуса утверждает, что над $\mathbb{R}$ существует только три конечномерных алгебры с делением: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{H}$, причём $\mathbb{C}$ не является центральным расширением $\mathbb{R}$. Поэтому $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ содержит два элемента.

Вычисление группы Брауэра для более сложных полей – весьма нетривиальная задача.