Алгебра 3 16.09.2011

Листок 1

Особенности плоских кривых

Поле k в этом листке – алгебраически замкнутое характеристики ноль.
Пусть $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathsf{k}}$ – алгебраическая кривая, заданная неприводимым уравнением $f = 0$. Точка $P \in C$ называется *особой*, если $df_P = 0$, в противном случае точка называется *неособой.*
Задача 1°. При каких значениях a кривая, заданная уравнением $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + a(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 0$ в $\mathbb{P}^2$, имеет особые точки? Найдите их. Будет ли кривая приводимой?
Задача 2. Найдите особые точки следующих кривых:

a) $x^2 = x^4 + y^4$,

b) $xy = x^6 + y^6$,

c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$,

d°) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Нарисуйте эти кривые.

Запишем многочлен $f \in \mathsf{k}[x, y]$ в виде $f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots$, где f_i – однородные многочлены от x и y степени i. Если r – минимальное такое, что $f_r \neq 0$, то $\mu_p = r$ называется *кратностью* точки $P = (0, 0)$ на кривой. Особенность называется *простой* (или *обыкновенной*) *двойной*, если f_2 – произведение непропорциональных линейных форм. Особенность называется *каспидальной*, если $f_2 = l^2$ для некоторой линейной формы l, и f_3 не делится на l.
Задача 3. Покажите, что точка $P = (0, 0)$ лежит на кривой C титтк $f_0 = 0$, она особая титтк $f_1 = 0$.
Задача 4. Пусть P – особая точка кратности r. Покажите, что для всякой прямой $L \ni P$, кроме конечного числа, ограничение f на L имеет в точке P нуль порядка r, а для конечного числа прямых кратность нуля больше r. Эти прямые называются *касательными* к C в точке P. Если в точке кратности r имеется r различных касательных, то особенность называется *обыкновенной* r-кратной.
Задача 5. a) Найдите кратность особенностей и касательные для кривых из задачи 2.
b) Напишите уравнение кривой, имеющей ровно r обыкновенных двойных особых точек.
Задача 6. a) Покажите, что кривая степени d, имеющая особую точку кратности $d - 1$, рациональна.

b^*) Покажите, что для любой (не обязательно плоской) неособой проективной кривой C имеется бирациональный морфизм $C \to \mathbb{P}^2$, образ которого – кривая, имеющая не более, чем обыкновенные двойные особенности.

Определим раздутие аффинного пространства $V = \mathbb{A}^n$ в точке $P = (0, 0, \ldots, 0)$ следующим образом. Рассмотрим подмножество

$$\widetilde{V} = \{(v, L) \mid v \in L\} \subset V \times \mathbb{P}(V),$$

обозначим через σ проекцию $\widetilde{V} \to V$, $(v, L) \mapsto v$.
Задача 7. a) Покажите, что $\widetilde{V}$ – квазипроективное алгебраическое многообразие.

b) Покажите, что σ взаимно-однозначно отображает $\sigma^{-1}(V \setminus P)$ на $V \setminus P$, и что $E := \sigma^{-1}(P) \cong \mathbb{P}(V)$.
Таким образом, при раздутии в V вместо P вклеивается множество касательных направлений в P. Если $X \subset V$ – алгебраическое подмногообразие, определим его *строгий прообраз* как замыкание (как записать его в координатах?)

$$\widetilde{X} = \overline{\sigma^{-1}(X \setminus P)}.$$

Пусть $P \in C$ – точка на плоской кривой, $\sigma\colon \widetilde{\mathbb{A}^2} \to \mathbb{A}^2$ – раздутие P, $E = \sigma^{-1}(P) \subset \widetilde{\mathbb{A}^2}$, а $\widetilde{C} \subset \widetilde{\mathbb{A}^2}$ – собственный прообраз C.

Задача 8. a) Пусть C – кривая, неособая в P. Тогда $\widetilde{C}$ пересекает E трансверсально в одной точке, соответствующей касательной к C в P.

b) Пусть $C = \cup L_i$ – объединение прямых, проходящих через P. Тогда $\widetilde{C} = \cup \widetilde{C}_i$ – объединение непересекающихся прямых.

c) Пусть P – каспидальная точка C. Тогда $\widetilde{C}$ имеет касание с E порядка 2.

d) Покажите, что в общем случае $E \cap \widetilde{C}$ состоит из конечного числа точек, отвечающих касательным в P к C.

e^*) Опишите $E \cap \widetilde{X}$ для $X \subset \mathbb{A}^n$ – произвольной гиперповерхности.

Вводя на раздутии плоскости локальные координаты, можно раздуть особенности строгого прообраза плоской кривой, потом его строго прообраза, и т.д. Можно показать, что в итоге получится неособая кривая.

Задача 9. Сделайте это для особенностей кривых из задачи 2. Нарисуйте картинки.

Поведение особенностей заметно упрощается при переходе к формальным координатам, т.е. к замене многочленов на степенные ряды.

Задача 10. a) Докажите, что из степенного ряда от нескольких переменных вида $1 + \dots$ (члены старших степеней) можно извлечь корень любой степени.

b) Пусть $l(x,y)$ и $m(x,y)$ – непропорциональные линейные формы, а $h = l + h_2 + \dots, g = m + g_2 + \dots$ – степенные ряды. Докажите что существует автоморфизм алгебры $\mathsf{k}[[x,y]]$, переводящий x и y в h и g соответственно.

Задача 11. a) Пусть кривая $f = 0$ имеет простую двойную особенность. Покажите, что существует разложение $f = h \cdot g$ в произведение степенных рядов $h, g \in \mathsf{k}[x,y]$ вида $h = h_1 + h_2 + \dots, g = g_1 + g_2 + \dots$.

Учитывая задачу 10b, говорят, что кривая $f = 0$ *формально*, или *аналитически* изоморфна кривой $xy = 0$ – объединению двух прямых.

b) Покажите, что каспидальная особенность формально изоморфна особенности $x^2 = y^3$.

c) Покажите, что любая особенность кратности 2 аналитически изоморфна особенности $xy = 0$ или $x^2 = y^r$, где $r \geqslant 3$.