Алгебра 3 — 23.09.2011, Листок 2

Коники и квадрики

Поле k в этом листке – алгебраически замкнутое характеристики ноль, если не сказано другое.

Коникой называется кривая степени 2 в $\mathbb{P}^2$, т.е. множество нулей однородного многочлена степени 2.

Задача 1. Докажите, что коника является двойной прямой, парой прямых либо неособой кривой.

Задача 2. Пусть $P \in C$ – точка на конике, а $L \subset \mathbb{P}^2$ – произвольная прямая, не содержащая P.

a) Покажите, что проекция из P: $C \xrightarrow{\pi} L$ – изоморфизм.

b) Пусть C и L задаются уравнениями $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ и $x_0 = 0$ соответственно, а $P = (1 : 1 : 0)$. Запишите обратное к π отображение в координатах.

Задача 3. a°) Покажите, что неособая коника над $\mathbb{Q}$ либо пуста, либо изоморфна $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$.

b) Пользуясь задачей 2b, покажите, что все рациональные точки на окружности $x^2+y^2 = 1$ имеют вид

$$\left(\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \frac{2pq}{p^2 + q^2}\right),$$

где $p, q \in \mathbb{Z}$.

c) Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 = z^2$.

d) Решите в целых числах уравнение $x^2 + 3y^2 = z^2$.

Полярное соответствие. Пусть V – 3-мерное векторное пространство, Q – невырожденная симметричная билинейная форма, а q – соответствующая квадратичная форма на V. Всякой точке $P \in \mathbb{P}(V)$ сопоставим прямую $P^\times$ в $\mathbb{P}(V)$, состоящую из тех точек S, для которых $Q(l_P, l_S) = 0$ (где l_P и l_S – прямые в V). Прямая $P^\times$ называется полярой точки P, а P – полярой $P^\times$.

Задача 4. a) Покажите, что всякая прямая является полярой единственной точки.

b) Покажите, что поляра точки строится так. Пусть PS_1 и PS_2 – касательные к конике C, задаваемой уравнением $q = 0$, причём $S_1, S_2 \in C$. Тогда S_1S_2 – поляра P.

c) Что есть поляра точки, лежащей на C?

d) Как (геометрически) строится поляра прямой?

Квадрикой называется поверхность степени 2 в $\mathbb{P}^3$, т.е. множество нулей однородного многочлена степени 2. *Рангом* квадрики называется ранг соответствующей квадратичной формы.

Задача 5. Покажите, что квадрика является двойной плоскостью (ранг 1), парой плоскостей (ранг 2), проективизацией конуса над коникой в $\mathbb{A}^3$ (ранг 3) или неособой поверхностью (ранг 4). При этом квадрика определяется своим рангом с точностью до изоморфизма.

Квадрика ранга 4 называется неособой квадрикой.

Алгебра 3 — 23.09.2011 — Листок 2

Рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathbb{P}^{r-1}\times\mathbb{P}^{s-1}\to\mathbb{P}^{rs-1}$, заданное формулой

$$((x_0:x_1:\ldots:x_r),(y_0:y_1:\ldots:y_s))\mapsto(x_0y_0:x_0y_1:\ldots:x_0y_s:x_1y_0:x_1y_1:\ldots).$$

Оно называется вложением Сегре.

Задача 6. a) Покажите, что образ σ – алгебраическое подмножество, его идеал порожден многочленами $z_{ij}z_{kl}-z_{il}z_{kj}$.

b) Покажите, что σ задаёт изоморфизм $\mathbb{P}^{r-1}\times\mathbb{P}^{s-1}$ с образом σ.

c^*) Найдите степень образа σ.

Задача 7. a°) Покажите, что неособая квадрика изоморфна $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$.

b) Покажите, что неособая квадрика неизоморфна $\mathbb{P}^2$.

Задача 8. a) Покажите, что на неособой квадрике есть два семейства прямых в $\mathbb{P}^3$, причём прямые из разных семейств пересекаются, а из одного – нет.

b) Покажите, что других прямых на квадрике нет.

c°) Опишите пересечение неособой квадрики с касательной плоскостью к ней в неособой точке.

d^*) Покажите, что прямая на квадрике не может быть задана одним дополнительным полиномиальным уравнением.

Задача 9*. Пусть P – точка на неособой квадрике Q, а $\widetilde{Q}$ – строгий прообраз Q при раздутии точки P. Докажите, что проекция из точки P задаёт регулярное отображение $\widetilde{Q}\to\mathbb{P}^2$, которое является раздутием двух точек на $\mathbb{P}^2$.

Задача 10. Пусть Q – квадрика ранга 3.

a) Опишите все прямые на Q.

b) Покажите, что прямая на Q может быть задана одним дополнительным уравнением.

c^*) Пусть $Q_0\subset\mathbb{A}^3$ – аффинный конус над коникой. Покажите, что идеал прямой на Q_0 не может быть порождён одним многочленом.

Задача 11*. Пусть P – особая точка на квадрике Q ранга 3, а $\widetilde{Q}$ – строгий прообраз Q при раздутии точки P.

a) Докажите, что прообраз P на $\widetilde{Q}$ – это коника в $\mathbb{P}^2$.

b) Покажите, что проекция из точки P задаёт регулярное отображение $\widetilde{Q}\to\mathbb{P}^2$, образ которого – коника, а слои которого – проективные прямые.

c) Изоморфны ли $\widetilde{Q}$ и $\mathbb{P}^2$? $\widetilde{Q}$ и $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$?