Алгебра 3 30.09.2011

Листок 3

Кубики

Поле k в этом листке – алгебраически замкнутое характеристики, не равной 2 и 3. *Кубикой* называется кривая степени 3 в $\mathbb{P}^2$.

Задача 1. a) Докажите, что кубика, содержащая две особые точки, приводима.

b) Докажите, что неприводимая кубика является неособой либо допускает рациональную параметризацию.

Пусть $C \subset \mathbb{A}^2$ – плоская кривая, заданная уравнением $f = 0$. Точка $P \in C$ называется *точкой перегиба*, если ограничение f на некоторую прямую в $\mathbb{A}^2$, проходящую через P имеет в P ноль порядка не менее 3.

Точка $P \in C \subset \mathbb{P}^2$ называется точкой перегиба, если она является точкой перегиба в аффинной карте.

Задача 2. a) Пусть C – график функции $y = f(x)$. Тогда $(x_0, f(x_0)) \in C$ – точка перегиба титтк $f''(x_0) = 0$. b) Покажите, что определение перегиба для проективной кривой не зависит от выбора координат и карты.

Матрицей Гессе функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется матрица её частных производных

$$\mathbf{H}_{ij}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Гессианом функции f называется определитель её матрицы Гессе: $H(f) = \det \mathbf{H}(f)$.

Задача 3. a) Как изменяются матрица Гессе и гессиан при линейной однородной замене координат $\bar{x} = A\bar{x}'$?

b) Покажите, что точка $P \in C \subset \mathbb{P}^2$ кривой $\{f = 0\}$ – точка перегиба титтк $H(f)(P) = 0$.

c) Сколько точек перегиба имеет проективная плоская кривая степени d?

Подсказка к b: выберете координаты удобным образом

Задача 4. a) Докажите, что уравнение любой неприводимой кубики можно привести проективной заменой координат к форме Вейерштрасса : $y^2 = x^3 + px + q$.

Подсказка: выберите точку перегиба за $(0:1:0)$, а касательную в ней – за бесконечно удалённую прямую.

b) Докажите, что кривая в форме Вейерштрасса неособа титтк $\Delta = 4p^3 + 27q^2 \neq 0$.

c^*) Докажите, что $j = \frac{2^8 3^3 p^3}{4p^3 + 27q^2}$ является инвариантом кривой (не зависит от выбора формы Вейерштрасса), принимает все значения в k и что две неособые кубики с равными значениями j проективно изоморфны.

d^*) Где в этой задаче использовалась алгебраическая замкнутость поля?

Задача 5. Покажите, что неприводимая особая кубика приводится к виду $y^2 = x^3$ или $y^2 = x^3 + x^2$. Каковы особенности этих кривых?

Пусть S_d – пространство однородных многочленов от x_0, x_1, x_2 степени d. Для точек $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^2$ через $S_d(P_1, \ldots, P_n)$ обозначим подпространство в S_d, состоящее из многочленов, равных нулю во всех точках P_i.

Задача 6. a) Пусть никакие 4 точки из $P_1, P_2, \ldots, P_5$ не лежат на одной прямой. Тогда $\dim S_2(P_1, \ldots, P_i) = 6 - i$ при $i \leqslant 5$.

b°) Покажите, что через любые 5 точек на $\mathbb{P}^2$, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная коника.

c) Пусть никакие 4 точки из $P_1, P_2, \ldots, P_8$ не лежат на одной прямой и никакие 7 не лежат на одной конике. Тогда $\dim S_3(P_1, \ldots, P_i) = 10 - i$ при $i \leqslant 8$.

d) Пусть две кубики пересекаются в 9 различных точках. Тогда любая кубика, проходящая через 8 из них, проходит и через девятую.

Задача 7 (теорема Паскаля). a) Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность, $P = AB \cap DE$, $Q = BC \cap EF$, $R = CD \cap FA$. Докажите, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. Подсказка: $AB \cup CD \cup EF$ – кубика.

Определим на неособой кубической кривой C структуру абелевой группы. Возьмём за ноль любую из точек перегиба O. Мы хотим, чтобы сумма трёх точек кривой, лежащих на одной прямой (с учётом кратностей) была равна нулю. Определим $-P$ как третью точку пересечения прямой PO с C. Определим $-(P+Q)$ как третью точку пересечения прямой PQ с C, определим $P+Q$ как $-(-(P+Q))$. Как проверить ассоциативность? Пусть $P, Q, R \in C$. Рассмотрим 8 точек $O, P, Q, R, S = P+Q, -S, T = Q+R, -T$ на C и две кубики: $PQ \cup OT \cup RS$ и $QR \cup OS \cup PT$

Задача 8°. Покажите, что $PT \cap RS \in C$ и тем самым введённая операция ассоциативна.

Задача 9. a) Опишите геометрически точки порядка 2 на неособой кубике. Сколько их?

b) Опишите геометрически точки порядка 3 на неособой кубике. Сколько их?

c) Опишите геометрически точки порядка 4 на неособой кубике. Сколько их?

Задача 10. Докажите, что прямая, пересекающая неособую кубику по двум точкам перегиба, проходит и через третью точку перегиба.

Задача 11. a) Покажите, что неособая кубика неизоморфна $\mathbb{P}^1$.

b^*) Покажите, что неособая кубика нерациональна.

Задача 12. Пусть C – кубика Ферма, заданная уравнением $x_0^3 + x_1^3 - x_2^3 = 0$.

a°) Приведите её к нормальной форме Вейерштрасса. Вычислите j-инвариант.

b°) Найдите точки перегиба C.

c) Опишите группу проективных автоморфизмов C.

d^*) Опишите группу всех автоморфизмов C.