Многообразия Грассмана

Пусть V – векторное пространство над полем k. Обозначим через $\mathrm{Gr}(k,V)$ множество k-мерных подпространств в V, через $\mathrm{Gr}(k,n)$ – множество k-мерных подпространств в k^n. $\mathrm{Gr}(k,V)$ и $\mathrm{Gr}(k,n)$ называются *многообразиями Грассмана.*

Докажем, что $\mathrm{Gr}(k,V)$ — алгебраическое многообразие.

Задача 1. Выберем базис $e_1,\ldots,e_n$ в V. a°) Пусть $U_{a_1\ldots a_k}\subset \mathrm{Gr}(k,V)$ – множество подпространств, проекция которых на $\langle e_{a_1},\ldots,e_{a_k}\rangle$ сюръективна. Докажите, что $U\cong \mathbb{A}^{k(n-k)}$.

b) Докажите, что $\mathrm{Gr}(k,V)$ покрывается такими картами и функции перехода между картами $U_{a_1\ldots a_k}$ регулярны. Тем самым, $\mathrm{Gr}(k,V)$ – алгебраическое многообразие размерности $k(n-k)$.

Докажем, что $\mathrm{Gr}(k,V)$ — проективное многообразие. Для этого вложим его в проективное пространство. Пусть $W\in \mathrm{Gr}(k,V)$ – подпространство с базисом $w_1,\ldots,w_k$. Сопоставим ему прямую $\langle w_1\wedge w_2\wedge\ldots\wedge w_k\rangle\in\mathbb{P}(\Lambda^k(V))$. Эта прямая (точнее, её координатная запись) называется *плюккеровыми координатами* W, а само сопоставление – *отображением Плюккера.*

Задача 2. Покажите, что установленное соответствие есть биекция между $\mathrm{Gr}(k,V)$ и классами ненулевых разложимых тензоров с точностью до пропорциональности.

Как описать разложимые тензоры в координатах? Пусть $x\in\Lambda^k(V)$, $\xi\in\Lambda^l(V^*)$, $l\leqslant k$. Обозначим через $x\vdash\xi$ свёртку тензора $x\otimes\xi$ по первым l аргументам.

Задача 3. a) Докажите, что x разложим $\Leftrightarrow$ отображение $V^*\to\Lambda^{k-1}(V)\colon f\mapsto x\vdash f$ имеет k-мерный образ, в противном случае размерность образа больше.

b) Задайте уравнениями множество разложимых k-векторов. Какова их степень?

Задача 4. a) Покажите, что $x\in\Lambda^k(V)$ разложим $\Leftrightarrow$ $(x\vdash\xi)\wedge x=0$ при всех $\xi\in\Lambda^{k-1}(V^*)$.

b) Покажите, что образ отображения Плюккера может быть задан квадратичными уравнениями.

Ещё проще дело обстоит при $k=2$. Тогда $x\in\Lambda^2(V)$ разложим титтк $x\wedge x=0$.

Задача 5. Выпишите это условие в координатах для a°) $\mathrm{Gr}(2,4)$; b) $\mathrm{Gr}(2,5)$.

c°) Докажите, что множество прямых в $\mathbb{P}^3$ изоморфно квадрике в $\mathbb{P}^5$.

Задача 6. Покажите, что следующие множества являются алгебраическими в $\mathrm{Gr}(k,V)$. Запишите их уравнения в плюккеровых координатах.

a) Подпространства $W\subset V$, содержащие фиксированное подпространство $T\subset V$.

b) Подпространства $W\subset V$, пересекающие фиксированное подпространство $T\subset V$.

c) Точки в $\mathrm{Gr}(2,4)$, отвечающее прямым на двумерной квадрике в $\mathbb{P}^3$ из одного семейства.

Пусть $V_i=\langle e_1,\ldots,e_i\rangle\subset\mathsf{k}^n$ – подпространства. Для $W\in\mathrm{Gr}(k,n)$ обозначим через $i(W)$ набор $(i_0,i_1,\ldots,i_n)$, где $i_d=\dim(W\cap V_d)$.

Задача 7. a) Покажите, что $i_0=0, i_n=k$, $i_{d+1}=i_d$ или i_d+1.

b) Сколько различных наборов $i(W)$ может получиться при разных W? Нарисуйте картинку.

Задача 8*. a) Покажите, что пространства W с фиксированным $i(W)=\bar{i}$ образуют множество $Z_{\bar{i}}$, изоморфное аффинному пространству.

b) Какова его размерность?

c) Покажите, что $Z_{\bar{i}}$ при $\bar{i}=(0,0,\ldots,0,1,2,\ldots,k)$ открыто по Зарисскому в $\mathrm{Gr}(k,n)$.

Получается, что многообразие Грассмана есть объединение непересекающихся подмножеств, изоморфных аффинным пространствам. Они называются *клетками Шуберта.*