

Примарное разложение

Кольцо называется *нётеровым*, если любая возрастающая последовательность идеалов в нём стабилизируется.

Идеал называют *неприводимым*, если его нельзя представить в виде пересечения двух отличных от него идеалов.

Идеал I называют *примарным*, если из $xy \in I$ следует $x \in I$ или $y^N \in I$ при некотором натуральном N .

Задача 1. а°) Найдите неприводимые идеалы в \mathbb{Z} и $\mathbb{C}[x]$.

б°) Найдите примарные идеалы в \mathbb{Z} и $\mathbb{C}[x]$.

с) Приведите пример примарного идеала, не являющегося неприводимым.

Задача 2. Докажите, что в нётеровом кольце любой идеал представим в виде пересечения конечного числа неприводимых идеалов.

Задача 3. Представьте в виде пересечения неприводимых идеалов:

а) идеалы $(60), (100500) \subset \mathbb{Z}$;

б) идеал $(x^2 + y^2 - 1, y - x^2 + 1) \subset \mathbb{C}[x, y]$;

с) идеалы $(x, y)^2, (x, y)^4 \subset \mathbb{C}[x, y]$;

д) идеал $(x^2, xy) \subset \mathbb{C}[x, y]$.

Задача 4. а) Покажите, что простой идеал неприводим.

б) Покажите, что если простой идеал \mathfrak{p} содержит пересечение $I_1 \cap \dots \cap I_n$, то он содержит и некоторый идеал I_j .

с) Покажите, что представление идеала в виде пересечения попарно не вложенных простых идеалов единственно (если существует).

Задача 5. а) Покажите, что радикал $r(I)$ примарного идеала I прост.

б) Покажите, что в нётеровом кольце для примарного идеала I имеем $r(I)^N \subset I \subset r(I)$ для некоторого N .

с*) Приведите пример простого идеала \mathfrak{p} , для которого \mathfrak{p}^2 – не примарный идеал.

Если $I \subset A$ – идеал и $x \in A$ – элемент, положим $I : x = \{y \in A \mid xy \in I\}$.

Задача 6. а) Покажите, что в нётеровом кольце для любых I, x найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $I : x^n = I : x^m$ для всех $n, m \geq N$.

б) Покажите, что для такого N выполнено $I = (I : x^N) \cap (I, x^N)$.

с) Покажите, что любой неприводимый идеал примарен.

Тем самым, мы показали, что в нётеровом кольце любой идеал есть пересечение конечного числа примарных. Такое представление идеала называется *примарным разложением*. Оно, как правило, не единственно. Однако, кое-что сказать можно.

Задача 7*. Пусть $I = \bigcap I_i$ – примарное разложение некоторого идеала. Рассмотрим минимальные по вложению элементы среди простых идеалов $r(I_i)$.

а) Докажите, что их множество не зависит от выбора примарного разложения I . Такие простые идеалы называются *минимальными простыми идеалами, ассоциированными с I* .

б) Докажите, что минимальные простые идеалы, ассоциированные с I , – это в точности минимальные по вложению элементы множества простых идеалов, содержащих I .

с) Пусть $A = k[X]$ – кольцо регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X , $I \subset A$ – идеал и $k = \bar{k}$. Тогда минимальные простые идеалы, ассоциированные с I , – это в точности идеалы неприводимых компонент подмногообразия $V(I) \subset X$.

д) Докажите, что $r(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset I} \mathfrak{p}$, где пересечение берётся по простым идеалам \mathfrak{p} , содержащим I .