Категория модулей над кольцом

Под модулями в этом листке имеются в виду левые модули над некоторым ассоциативным кольцом с единицей A. Категорию левых модулей над кольцом A обозначим $A{-}\mathrm{mod}$.

Задача 1°. Пусть $f\colon M \to N$ – гомоморфизм модулей. Опишите конечный объект в следующей категории. Объекты – пары (X, u), где X – модуль, а $u\colon X \to M$ – такой гомоморфизм, что $fu = 0$. Морфизмы из (X_1, u_1) в (X_2, u_2) – такие гомоморфизмы $g\colon X_1 \to X_2$, что $u_2 g = u_1$.

Задача 2. Пусть X – топологическое пространство, Y – множество, $f\colon X \to Y$ – отображение. Опишите начальный объект в следующей категории. Объекты – пары (Z, v), где Z – топологическое пространство, $v\colon Y \to Z$ – отображение множеств такое, что композиция vf непрерывна. Морфизмы из (Z_1, v_1) в (Z_2, v_2) – такие непрерывные отображения $g\colon Z_1 \to Z_2$, что $gv_1 = v_2$.

Задача 3. Опишите произведение и копроизведение в категории a°) коммутативных колец; b^{*}) колец; c) частично упорядоченных множеств; d) где объекты – элементы линейно упорядоченного множества X, из x в y есть единственный морфизм, если $x \leqslant y$; e°) где объекты – натуральные числа, из m в n есть единственный морфизм, если $m|n$.

Задача 4. Пусть $A \to B$ – гомоморфизм коммутативных колец. Докажите, что левым сопряжённым к функтору забывания $B{-}\mathrm{mod} \to A{-}\mathrm{mod}$ будет функтор расширения скаляров $M \mapsto B \otimes_A M$, а правым сопряжённым – функтор $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M)$.

Задача 5. Пусть A – коммутативное кольцо, $S \subset A$ – подкольцо, M – A-модуль. Проверьте, что правым сопряжённым к функтору $M \otimes_A -$ из A-модулей в S-модули будет функтор $\mathrm{Hom}_S(M, -)$.

Модуль P называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма модулей $s\colon M \to N$ и любого гомоморфизма $f\colon P \to N$ найдётся гомоморфизм $f'\colon P \to M$ такой, что $sf' = f$. Двойственно, модуль I называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $t\colon M \to N$ и любого гомоморфизма $g\colon M \to I$ найдётся гомоморфизм $g'\colon N \to I$ такой, что $g't = g$.

Задача 6. a) Покажите, что модуль $\oplus P_i$ проективен титтк каждый из модулей P_i проективен.

b) Покажите, что модуль $\prod I_i$ инъективен титтк каждый из модулей P_i инъективен.

Задача 7. a) Покажите, что свободный модуль $\oplus_{t\in T} A$ любого ранга проективен.

b) Покажите, что любой проективный модуль является прямым слагаемым свободного.

c) Приведите пример проективного, но не свободного модуля.

Подсказка: возьмите кольцо $M_2(\mathbb{R})$ или $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Задача 8*. Докажите критерий инъективности Бэра: A-модуль I инъективен титтк для любого левого идеала $J \subset A$ любой гомоморфизм $f\colon J \to I$ продолжается до гомоморфизма $A \to I$.

Подсказка: воспользуйтесь леммой Цорна и продолжайте гомоморфизм постепенно.

Задача 9. a) Докажите, что модуль I над кольцом главных идеалов без делителей нуля A инъективен титтк он делим, т.е. для любых $m \in M$ и $a \in A$, $a \neq 0$, найдётся $y \in M$ такой, что $x = ay$.

b) Покажите, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективные $\mathbb{Z}$-модули.