Комплексы и когомологии

Под модулями в этом листке имеются в виду левые модули над некоторым ассоциативным кольцом с единицей A. Категорию левых модулей над кольцом A обозначим $A-\mathrm{mod}$.

Задача 1. Любой стягиваемый комплекс есть прямая сумма сдвигов комплексов вида $\ldots 0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \ldots$

Задача 2 (5-лемма). Дан морфизм между точными комплексами

$$\begin{tikzcd} K^1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & K^2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & K^3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & K^4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & K^5 \arrow[d, "f_5"] \\ L^1 \arrow[r] & L^2 \arrow[r] & L^3 \arrow[r] & L^4 \arrow[r] & L^5, \end{tikzcd}$$

причём среди f_i все, кроме f_3, – изоморфизмы. Покажите, что f_3 – тоже изоморфизм.

Сдвиг комплекса $(K^\bullet, d^\bullet)$ – это комплекс $(K[1]^\bullet, d[1]^\bullet)$, где $K[1]^i = K^{i+1}, d[1]^i = -d^{i+1}$. Пусть дан морфизм комплексов $f^\bullet\colon K^\bullet \to L^\bullet$. Определим комплекс $C(f)^\bullet$, называемый *конусом* f: положим $C^i = K^{i+1} \oplus L^i$ и

$$d_C^i(k^{i+1}, l^i) = (-d(k^{i+1}), f(k^{i+1}) + d(l^i)).$$

Задача 3. a) Проверьте, что $C(f)^\bullet$ – комплекс. b) Определите естественные морфизмы $a^\bullet\colon L^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $b^\bullet\colon C(f)^\bullet \to K[1]^\bullet$, покажите, что они образуют точную тройку

$$0 \to L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \to 0.$$

c) Докажите, что связывающие гомоморфизмы $H(K) \to H(L)$ для указанной точной тройки совпадают с гомоморфизмами, индуцированными f.

Задача 4. Проверьте, что в последовательности

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} K[1] \xrightarrow{f[1]} L[1]$$

композиции af и $f[1]b$ гомотопны нулю.

Задача 5. Проверьте, что морфизм комплексов – a) квазиизоморфизм $\Leftrightarrow$ его конус ацикличен; b^*) гомотопическая эквивалентность $\Leftrightarrow$ его конус стягиваем.

Пусть A – коммутативное кольцо, а B – алгебра над A. Положим $K_i = 0$ при $i < -1$,

$$K_i = \underbrace{B \otimes_A B \otimes_A \ldots \otimes_A B}_{i+2 \text{ раза}}$$

иначе. Дифференциал определим по формуле

$$d_k(b_0 \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i b_0 \otimes \ldots \otimes b_i b_{i+1} \otimes \ldots \otimes b_{k+1}.$$

Задача 6°. a) Докажите, что получится комплекс. Он называется *Bar-резольвентой.*

b) Найдите его гомологии: покажите, что отображения $h_i\colon K_i \to K_{i+1}$:

$$h_i(b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i+1}) = 1 \otimes b_0 \otimes \ldots \otimes b_{i+1}$$

задают гомотопию тождественного морфизма Bar-резольвенты нулю.

Определим комплекс модулей $K(x_1,\ldots,x_n)_\bullet$ над алгеброй $A=\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$. Пусть $M=A^{\oplus n}=\oplus_1^n Ae_i$, положим $K_i=\Lambda^i(M)$ и

$$d_k(e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})=\sum_{r=1}^{k}(-1)^r x_{i_r}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_{r-1}}\wedge e_{i_{r+1}}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$$

Задача 7. Проверьте, что получится комплекс. Он называется *комплексом Кошуля.*
Двойственным комплексом к комплексу $(K_\bullet,d_\bullet)$ называется комплекс $(K^{*\bullet},d^{*\bullet})$, для которого $K^{*i}=\mathrm{Hom}_A(K_i,A)$, а $d^{*i}=(d_{i+1})^*$.
Задача 8. Вычислите двойственный комплекс к комплексу Кошуля.
Покажем, что в комплексе Кошуля $H_0=\mathsf{k}$, $H_i=0$ при $i>0$.
Задача 9. a) Покажите, что в $K(x_1,\ldots,x_n)$ имеется подкомплекс $K(x_2,\ldots,x_n)\otimes_{\mathsf{k}}\mathsf{k}[x_1]$, состоящий из членов, не содержащих e_1, а фактор по этому подкомплексу изоморфен $e_1\wedge K(x_2,\ldots,x_n)\otimes_{\mathsf{k}}\mathsf{k}[x_1]$.
b) Покажите, что $K(x_1,\ldots,x_n)$ есть конус морфизма умножения на x_1:

$$K(x_2,\ldots,x_n)\otimes_{\mathsf{k}}\mathsf{k}[x_1]\xrightarrow{x_1}K(x_2,\ldots,x_n)\otimes_{\mathsf{k}}\mathsf{k}[x_1].$$

c) Вычислите когомологии $K(x_1,\ldots,x_n)$.
Пусть $K^\bullet$ и $L^\bullet$ – комплексы. Определим *комплекс морфизмов* следующим образом. Положим

$$\mathrm{Hom}(K,L)^i=\prod_n \mathrm{Hom}(K^n,L^{n+i}),$$

а дифференциал d^i переводит семейство $(f^n)\in\mathrm{Hom}(K,L)^i$ в семейство $(g^n)\in\mathrm{Hom}(K,L)^{i+1}$,

$$g^n=df^n-(-1)^i f^{n+1}d.$$

Задача 10°. a) Проверьте, что это действительно дифференциал. b) Что такое циклы, границы и когомологии в комплексе морфизмов?