Ext, Tor и когомологии групп

Задача 1. Вычислите
a) $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(M,N)$, где M,N – конечные либо бесконечные циклические группы.
b) $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M,N)$, где M,N – конечные либо бесконечные циклические группы.
c) $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{C}[t]}(M,N)$, где M,N – модули вида $\mathbb{C}[t]$ либо $\mathbb{C}[t]/(t-a)^n$.
Задача 2. Покажите, что $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)=0$ при $i>0$, если N – инъективный A-модуль. Покажите, что $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ при $i>0$, если N – проективный A-модуль.
Задача 3. Вычислите
a) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathsf{k},A)$ и b°) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathsf{k},\mathsf{k})$, где $A=\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$;
c) $\mathrm{Tor}_i^A(\mathsf{k},\mathsf{k})$, где $A=\mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$.
d) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathsf{k},A)$ и e°) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathsf{k},\mathsf{k})$, где $A=\mathsf{k}[x]/(x^2)$.
Подсказка: используйте резольвенту Кошуля.

Пусть G – группа, а M – $\mathbb{Z}[G]$- модуль, т.е. абелева группа с действием G. Определим когомологии группы G со значениями в модуле M как когомологии следующего комплекса:

$$K^n=\mathrm{Hom}(G^{\times n},M),$$
$$(d^nf)(g_1,\ldots,g_{n+1})=g_1f(g_2,\ldots,g_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^if(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1})+ \\ +(-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n).$$

Коциклы и кограницы этого комплекса называются соответственно коциклами и кограницами группы G с коэффициентами в M.
Задача 4. a) Проверьте: $H^0(G,M)=M^G=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(Z,M)$, где $M^G=\{m\mid\forall g\ gm=m\}$.
b) Опишите явно $H^1(G,\mathbb{Z})$.
Задача 5. a) Покажите, что комплекс левых $\mathbb{Z}[G]$-модулей

$$K^n=\mathbb{Z}[G]^{\otimes n+1},\quad d_n(g_0\otimes\ldots\otimes g_n)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^ig_0\otimes\ldots\otimes g_ig_{i+1}\otimes\ldots\otimes g_n+(-1)^ng_0\otimes\ldots\otimes g_{n-1}.$$

является свободной резольвентой модуля $\mathbb{Z}$. Подсказка: вспомните Bar-резольвенту.
b) Покажите, что
$$H^i(G,M)\cong\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M).$$

Задача 6°. a) Докажите, что комплекс

$$\ldots\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{1-\sigma}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\sum\sigma^i}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{1-\sigma}\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}$$

является свободной резольвентой G-модуля Z для группы $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle_n$.
b) Вычислите при помощи этой резольвенты $H^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},M)$, где M – модуль с тривиальным действием.

Алгебра 3 4.11.2011

Листок 8

Расширением группы G при помощи группы A называется точная тройка $1 \to A \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$. Расширение называется *расщепимым*, или *полупрямым произведением*, если у p есть правый обратный гомоморфизм s.

Задача 7. Покажите, что соответствие $g \mapsto s(g)(-)s(g)^{-1}$ задаёт биекцию между множеством полупрямых произведений G на A и множеством гомоморфизмов $G \to \mathrm{Aut}(A)$. Для заданного действия G на A соответствующее расщепимое расширение имеет вид $A \times G$ (как множество) с умножением $(a, g)(a', g') = (ag(a'), gg')$.

Задача 8. a) Покажите, что множество расщеплений s заданного расщепимого расширения биективно множеству 1-коциклов G со значениями в G-модуле A.

b) Проверьте, что автоморфизмы расширения $1 \to A \to G' \xrightarrow{p} G \to 1$, постоянные на A и G, взаимно-однозначно соответствуют 1-коциклам G со значениями в A.

Задача 9. Пусть A абелева и задано расширение G с помощью A. Выберем отображение множеств $s \colon G \to G'$, обратное к p. Положим $\alpha(g, h) = s(gh)s(h)^{-1}s(g)^{-1}$.

a) Проверьте, что $\alpha(g, h) \in A$ и что α образуют 2-коцикл G со значениями в A.

b) Покажите, что класс когомологий коцикла α не зависит от выбора s.

c) Докажите, что расширения G с помощью A с заданным действием G на A по модулю изоморфизма взаимно-однозначно соответствуют $H^2(G, A)$.