Алгебра 3

11.11.11
Листок 9

Факторы по действию групп

Пусть конечная группа G действует на аффинном многообразии X. Как построить фактор? Определим действие G на алгебре $A = \mathsf{k}[X]$ формулой $g(f)(x) = f(g^{-1}(x))$. Пусть $A^G = \{f \in \mathsf{k}[X] \mid g(f) = f\} \subset A$ – алгебра инвариантов.

Задача 1. a) Покажите, что алгебра A *цела* над A^G, т.е. любой $a \in A$ является корнем некоторого многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_i \in A^G$.

b) Покажите, что A – конечно порождённый A^G-модуль.

Задача 2. Предположим, что алгебра A конечно порождена над полем k элементами a_i, а $B \subset A$ – такая подалгебра, что A конечно порождена элементами e_j как B-модуль. Пусть $a_i = \sum c_{ij} e_j$, $e_i e_j = \sum c_{ijk} e_k$.

a) Покажите, что A – конечно порождённый модуль над алгеброй $\mathsf{k}[c_{ij}, c_{ijk}]$.

b) Покажите, что B – конечно порождённый модуль над алгеброй $\mathsf{k}[c_{ij}, c_{ijk}]$.

c) Покажите, что B – конечно порождённая алгебра над k.

Мы доказали (в случае конечной группы) теорему Гильберта об инвариантах, говорящей, что алгебра инвариантов $\mathsf{k}[X]^G$ конечно порождена.

Задача 3. a) Докажите, что алгебра $\mathsf{k}[X]^G$ изоморфна алгебре $\mathsf{k}[Y]$ функций на некотором аффинном многообразии Y, постройте регулярное отображение $\pi\colon X \to Y$.

b) Покажите, что π постоянно на орбитах действия и что любое регулярное отображение $X \to Z$ в аффинное многообразие, постоянное на орбитах, пропускается через π единственным образом. Эта задача означает, что многообразие Y является *категорным фактором* X по действию группы G.

Задача 4. Опишите алгебры инвариантов и фактормногообразия

a) $\mathbb{A}^1$ по действию циклической группы умножением на корни n-й степени из 1;

b) $\mathbb{A}^2$ по инволюции $(x, y) \mapsto (-x, -y)$;

c) $\mathbb{A}^2$ по действию $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi^{-1} y)$;

d) $\mathbb{A}^2$ по действию, порождённому операторами $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi^{-1} y)$ и $(x, y) \mapsto (iy, ix)$;

e) $\mathbb{A}^2$ по действию $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(x, y) \mapsto (\xi x, \xi y)$;

f) $\mathbb{A}^n$ по действию S_n перестановками координат.

Пусть A – алгебра над k с действием конечной группы G и $\operatorname{char}\mathsf{k}$ не делит $|G|$.

Задача 5. a) Пусть $\mathfrak{m} \subset A^G$ – максимальный идеал. Покажите, что найдётся максимальный идеал $\mathfrak{m}' \subset A$ такой, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap A^G$. Подсказка: проверьте при помощи усреднения, что $A\mathfrak{m} \cap A^G = \mathfrak{m}$.

b) Пусть идеал I лежит в конечном объединении простых идеалов $\mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_n$. Докажите, что тогда I лежит и в некотором идеале $\mathfrak{p}_j$.

c) Пусть $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'' \subset A$ – два максимальных идеала и $\mathfrak{m}' \cap A^G = \mathfrak{m}'' \cap A^G$. Тогда $\mathfrak{m}'' = g(\mathfrak{m}')$ для некоторого $g \in G$.

d) Пусть $\mathsf{k} = \bar{\mathsf{k}}$. Докажите, что прообраз любой точки $y \in Y$ при морфизме факторизации $\pi\colon X \to Y = X/G$ равен G-орбите некоторой точки $x \in X$. Тем самым, Y биективно фактормножеству X по действию G.