Алгебра 3

18.11.2011
Листок 10

Локализация и кратности

Пусть $S \subset A$ – *мультипликативная система*, т.е. подмножество коммутативного кольца, замкнутое относительно умножения и не содержащее нуля.
Локализация A_S кольца A по S – это множество классов дробей a/s $(a \in A, s \in S)$ по отношению эквивалентности: $a/s \sim a'/s'$, если $(as' - a's)s'' = 0$ при некотором $s'' \in S$.
Локализация M_S модуля M над A по S – это множество классов дробей m/s $(m \in M, s \in S)$ по отношению эквивалентности: $m/s \sim m'/s'$, если $(ms' - m's)s'' = 0$ при некотором $s'' \in S$.
Задача 1. Введите сложение и умножение на A_S, проверьте корректность.
Задача 2. a) Постройте гомоморфизм $l\colon A \to A_S$, покажите, что он переводит S в обратимые элементы.

b) Покажите, что l – начальный объект в категории морфизмов вида $A \to B$, переводящих S в обратимые элементы.
Задача 3. Докажите, что:

a) M_S является A_S-модулем;

b) $M_S \cong M \otimes_A A_S$;

c) $(M/N)_S \cong M_S/N_S$;

d) функтор $M \mapsto M_S$ из $A-\mathrm{mod}$ в $A_S-\mathrm{mod}$ точен.
Задача 4. Покажите, что:

a) простые идеалы в A_S взаимно-однозначно соответствуют простым идеалам в A, не пересекающимся с S;

b) Если A нётерово, то A_S нётерово.
Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал. Локализацией кольца A или модуля M по $\mathfrak{p}$ называется их локализация по мультипликативной системе $A \setminus \mathfrak{p}$: $A_\mathfrak{p} := A_{A\setminus\mathfrak{p}}$, $M_\mathfrak{p} := M_{A\setminus\mathfrak{p}}$.
Задача 5. Докажите, что:

a) кольцо $A_\mathfrak{p}$ *локально*, т.е. имеет единственный максимальный идеал;

b) если $I \subset A$ – идеал, то $(A/I)_\mathfrak{p} = 0$ при $I \not\subset \mathfrak{p}$;

c) $(A/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ – поле.

Фильтрацию $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$ модуля M называют максимальной, если она строго монотонна и её нельзя уплотнить с сохранением этого условия. *Длиной модуля* называют длину его максимальной фильтрации (если она существует).
Задача 6. a) Покажите, что фильтрация максимальна титтк факторы M_i/M_{i-1} – простые модули.

b) Покажите, что простой модуль имеет вид $A/\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал.

c) Найдите длину $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Задача 7. Пусть $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в нётеровом кольце A. Докажите, что:

a) длина модуля $A/\mathfrak{m}^k$ конечна;

b) она равна $\sum_{i=1}^{k} \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^{i-1}/\mathfrak{m}^i$ (размерность над полем $A/\mathfrak{m}$).

c) Пусть на конечно порождённом модуле M умножение на элементы из $\mathfrak{m}^k$ нулевое. Тогда M имеет конечную длину.
Найдите длину модулей

d) $\mathsf{k}[x]/(x^k)$ над $\mathsf{k}[x]$; e) $\mathsf{k}[x,y]/(x^k, y^l)$ над $\mathsf{k}[x,y]$;

f) $\mathsf{k}[x,y]/(x,y)^k$ над $\mathsf{k}[x,y]$; g) $\mathsf{k}[x,y]/(x^2+y^2-1, y-x^2+1)$ над $\mathsf{k}[x,y]$.

Задача 8* (теорема Жордана-Гёльдера). Докажите, что длина максимальной фильтрации $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$ и набор (с кратностями) простых модулей M_i/M_{i-1} не зависят от выбора фильтрации для заданного модуля M. Подсказка: если есть другая фильтрация, рассмотрите пересечения M_i с M'_1 и перейдите к факторфильтрациям на M/M'_1.

Задача 9. Пусть M – конечно порождённый модуль над нётеровым кольцом A.

a) Пусть $\mathfrak{p}$ – максимальный по вложению идеал среди идеалов вида $\mathrm{Ann}(m) = \{a \in A \mid am = 0\}$, $m \in M$, $m \neq 0$. Докажите, что $\mathfrak{p}$ прост.

b) Докажите, что M имеет фильтрацию $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$ с факторами $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i \subset A$ – простые идеалы.

Задача 10. Пусть $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = M$ – фильтрация из прошлой задачи.

a) Пусть $I \subset A$ – простой идеал. Покажите, что у модуля M_I есть фильтрация с факторами, изоморфными $(M_i/M_{i-1})_I$.

b) Пусть $\mathfrak{p}$ – минимальный по вложению идеал среди $\mathfrak{p}_i$. Покажите, что число $\mathfrak{p}_i$, совпадающих с $\mathfrak{p}$, равно длине $A_\mathfrak{p}$-модуля $M_\mathfrak{p}$ и не зависит от выбора фильтрации.

c) Покажите, что предыдущее утверждение не обязательно верно, если $\mathfrak{p}$ – не минимальный среди $\mathfrak{p}_i$.

Задача 11. a) Пусть $I \subset \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ – идеал, а $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ – его множество нулей. Покажите, что множество минимальных идеалов среди $\mathfrak{p}_i$ из задачи 10 совпадает с множеством минимальных ассоциированных с I простых идеалов (см. листок 5). Количество $\mathfrak{p}_i$, равных заданному $\mathfrak{p}$, называется *кратностью* компоненты $V(\mathfrak{p})$ в X.

b) Пусть кратность каждой компоненты X равна 1. Верно ли, что $I = r(I)$?