Алгебра 3 25.11.2011
Листок 11

Многочлен Гильберта

Основное поле в этом листке алгебраически замкнуто.

Задача 1. Вычислите многочлен Гильберта для следующих проективных многообразий:

a°) гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$;

b°) (невырожденного) пересечения поверхностей степеней d_1 и d_2 в $\mathbb{P}^3$;

c) образа вложения Сегре $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$.

Задача 2 (Вложение Веронезе). Вложением Веронезе (или n-кратным вложением) называется отображение $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$:

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_m) \mapsto (x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : \ldots (\text{все мономы степени } n \text{ от } x_0, \ldots, x_m) \ldots).$$

a) Чему равно N?

b) Проверьте, что это действительно вложение, постройте обратное отображение.

c°) Найдите степень и многочлен Гильберта образа $\mathbb{P}^1$ при n-кратном вложении Веронезе $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$.

d) Найдите степень и многочлен Гильберта образа $\mathbb{P}^m$ при n-кратном вложении Веронезе $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^N$.

Образ $\mathbb{P}^1$ при n-кратном вложении называется *нормальной рациональной кривой* в $\mathbb{P}^n$.

Задача 3. Пусть $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}^n$ – замкнутые подмногообразия, $X = X_1 \cup X_2$

a) Постройте точную последовательность

$$0 \to S(X) \to S(X_1) \oplus S(X_2) \to S(X_1 \cap X_2) \to 0.$$

b) Покажите, что $m(X) = m(X_1)$, если $\dim X_1 > \dim X_2$.

c) Покажите, что $m(X) = m(X_1) + m(X_2)$, если $\dim X_1 = \dim X_2 > \dim X_1 \cap X_2$.

Задача 4*. a) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое подмногообразие степени 1. Докажите, что X – проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$.

b) Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – неприводимое подмногообразие степени 2. Докажите, что X – квадрика в некотором проективном подпространстве в $\mathbb{P}^n$.

Задача 5. Покажите, что любое регулярное отображение $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$

a) имеет вид $\phi(x) = (F_0(x) : \ldots : F_n(x))$, где $F_i(x)$ – формы одинаковой степени d от переменных $x_0, \ldots, x_m$;

b) есть композиция d-кратного вложения $\mathbb{P}^m$ и линейной проекции в проективном пространстве.

Задача 6. Пусть образ X вложения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ не содержится ни в каком собственном подпространстве.

a) Докажите, что степень X не меньше n.

b) Покажите, что если степень X равна n, то X – нормальная рациональная кривая (с точностью до проективного автоморфизма).