

Векторные пространства

- A5.1. а)** Докажите, что последовательности комплексных чисел, удовлетворяющие условию $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, образуют векторное пространство, и найдите его размерность.
- б)** Найдите все геометрические прогрессии в этом пространстве, выберите из этих прогрессий базис и разложите по нему последовательность u_n чисел Фибоначчи.
- в)** При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ в пространстве последовательностей комплексных чисел, удовлетворяющих условию $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}$, существует базис из геометрических прогрессий?
- A5.2.** Укажите какой-нибудь базис и найдите размерность пространства многочленов $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ степени не выше n , **а)** обращающихся в нуль в точках $t = 0, t = 1$ и $t = 5$;
б) таких, что $P(0) = P(1) = 2P(5)$.
- A5.3 (Интерполяционная формула Лагранжа.)** Пусть V — пространство многочленов степени не выше n .
- а)** Проверьте, что для любой точки $p \in \mathbb{C}$, следующая формула задает линейный функционал δ_p на пространстве V : $\delta_p(f) = f(p)$.
- б)** Пусть $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{C}$ — попарно различные точки. Укажите многочлен степени не выше n , принимающий ненулевое значение ровно в одной из этих точек.
- в)** Докажите, что функционалы $\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_{n+1}}$ образуют базис в пространстве V^* , и найдите двойственный базис в пространстве V .
- г)** Укажите многочлен степени не выше n , принимающий в данных точках p_1, \dots, p_{n+1} данные значения a_1, \dots, a_{n+1} .
- A5.4. а)** Сколько элементов в n -мерном векторном пространстве над полем \mathbb{F}_p ?
б) Сколько там прямых (1-мерных подпространств)? **в)** упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов? **г)** k -мерных подпространств?
- A5.5.** Докажите, что всякое отображение $\mathbb{F}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$ задается многочленом степени не выше $p-1$.