Абелевы группы

A9.1. Вычислите **а)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; **б)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; **в)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

A9.2. **а)** При каких m и n группы $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ изоморфны?

б) Какие из следующих групп изоморфны: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$?

A9.3. Есть ли в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

A9.4. Абелева группа A содержит в качестве подгруппы $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$, а факторгруппа изоморфна $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ (числа p и q простые). Чему может быть изоморфна группа A?

A9.5. Пусть $A = \mathbb{Z}^n$, $F\colon A \to A$. Докажите, что:

а) группа $A/\operatorname{Im} F$ конечна тогда и только тогда, когда $\det F \neq 0$.

б) Порядок этой группы равен $|\det F|$.

A9.6. Пусть $d_A(n)$ — количество элементов, аннулируемых умножением на n, в абелевой группе A.

а) Докажите, что если группа A конечна и при этом $d_A(n) \leqslant n$, то A циклическая.

б*) Пусть $d_A = d_B$ для конечных абелевых групп A и B. Верно ли, что группы A и B изоморфны?

A9.7.

а) Пусть $K^\times$ — группа ненулевых элементов поля K (по умножению). Может ли она содержать конечную нециклическую подгруппу?

б) Верно ли, что мультипликативная группа конечного поля всегда циклична?

A9.8*. Разложите группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, где m произвольно, в прямую сумму циклических.