Алгебра 3 11.12.2011

Экзамен

Задача 1. Покажите, что алгебра $\mathbb{C}[X]$ регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X раскладывается в прямое произведение двух подалгебр тогда и только тогда, когда X несвязно.

Задача 2. Аффинны ли следующие алгебраические многообразия:
a) $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \setminus Q$, где $Q \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ – неособая кубическая поверхность,
b) $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \setminus C$, где $C \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ – скрученная кубическая кривая?

Задача 3. Докажите, что через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$ можно провести неособую квадрику.

Задача 4. Пусть $A = \mathbb{C}[x^2, x^3]$ и $\mathbb{C}$ обозначает A-модуль с тривиальным действием x.
a) Постройте свободную резольвенту для A-модуля $\mathbb{C}$ и
b) вычислите $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ и c) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbb{C}, A)$.

Задача 5. Пусть $J = (xy, z(x+y)) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ – идеал.
a) Найдите $V(J)$ и $r(J)$.
b) Каким минимальным числом образующих порождается идеал $r(J)$?
c) Найдите ассоциированные с модулем $\mathbb{C}[x, y, z]/J$ простые идеалы и их кратности.

Задача 6. Пусть $I_p \subset \mathbb{Z}[x]$ – идеал, образованный многочленами $f(x)$ такими, что $f(0)$ делится на простое число p.
a) Примарны ли идеалы I_p^n?
b) Представьте I_p^n в виде пересечения неприводимых идеалов.