Математический анализ, I курс, 2011/12 уч.г.
Листок N1, 9 сентября 2011 г.

1. Пусть $p > 0$. Для точек $A_i = (x_i, y_i) \in R^2$, $i = 1, 2$, положим

$$\rho_p(A_1, A_2) = \sqrt[p]{|x_2 - x_1|^p + |y_2 - y_1|^p}\,.$$

а) При каких p это — метрика на плоскости R^2?
б) Можно ли (естественным образом) определить ρ_∞? Что это такое? Является ли оно метрикой?
в) При фиксированном p (не обязательно таком, при котором ρ_p — метрика) будем называть подмножество X плоскости R^2 открытым, если для любой точки $A \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что любая точка B, для которой $\rho_p(A, B) < \varepsilon$, принадлежит X. При каких (положительных) p описанное семейство открытых множеств определяет топологию на плоскости.
г) При каких p (допустимых с точки зрения пункта в)) соответствующие топологии на плоскости R^2 совпадают?
2. Будем говорить, что интервал α на числовой прямой R *строго* вложен в интервал β, если α вложен в β и никакие из их концов не совпадают. Доказать, что последовательность строго вложенных друг в друга (непустых) интервалов имеет общую точку. Сформулировать (какой-нибудь) аналог этого утверждения для плоскости R^2.
3. Пусть X — топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на нем, $X/\sim$ — множество классов эквивалентности.
а) Ввести (естественную) топологию на множестве $X/\sim$.
б) Определим отношение эквивалентности на пространстве R^n тем, что $x \sim y$ если $y = \lambda x$ для некоторого ненулевого $\lambda \in R$ (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$; проверить, что это — действительно отношение эквивалентности.) Является ли пространство $R^n/\sim$ хаусдофовым? Какие последовательности в этом пространстве имеют пределы и чему они равны?
в) Определим тем же самым способом отношение эквивалентности на пространстве $R^n \setminus \{0\}$ (R^n без начала координат). Является ли пространство $(R^n \setminus \{0\})/\sim$ хаусдофовым? Какие последовательности в этом пространстве имеют пределы и чему они равны?

4. Определим на множестве R^n топологию следующим образом. Рассмотрим всевозможные системы уравнений I вида

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

$$P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

$$\ldots$$

$$P_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

где P_i являются многочленами от n переменных (такие уравнения называются *алгебраическими*). Множество Z_I решений такой системы назовем замкнутым. В частности, пустой системе соответствует (замкнутое) множество R^n. Множество, дополнение к которому замкнуто, назовем открытым. Полезно иметь в виду, что произвольная (например, бесконечная) система алгебраических уравнений эквивалентна некоторой системе *конечного числа* таковых. Но мы не будем это доказывать.

а) Сформулировать алгебраическое утверждение, гарантирующее, что описанная система (открытых) множеств определяет топологию на пространстве R^n. (Эта топология называется *топологией Зариского.*)

б) Что представляют из себя замкнутые множества в топологии Зариского на R?

в) Сравнимы ли топология Зариского и стандартная топология на пространстве R^n.

г) Доказать, что топология Зариского является самой слабой среди всех топологий на R^n, для которых множество решений произвольного алгебраического уравнения является замкнутым. Это свойство можно считать альтернативным определением.

д) Доказать, что любые два непустых открытых множества в топологии Зариского пересекаются.

е) Найти пределы последовательности (x_n, y_n), $x_n = 1/n, y_n = 0$ в топологии Зариского на R^2.