Компактность и метрические пространства

Определение. Топологическое пространство X называется *компактным,* если из любого его покрытия $X = \cup_{i\in I}U_i$ открытыми подмножествами $U_i \subset X$ можно выбрать конечное подпокрытие. Подмножество $Y \subset X$ топологического пространства X называется компактным, если оно компактно в индуцированной топологии.

2.1 а) Докажите, что открытый интервал (a, b) и вещественная прямая $\mathbb{R}$ не компактны.
б) Докажите, что замкнутый отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен.

2.2 Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении — компакт.

Определение. Топологическое пространство X называется *секвенциально компактным,* если из любой последовательности $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ в X можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

2.3 а) Докажите, что для метрического пространства компактность и секвенциальная компактность эквивалентны.
б)* Приведите пример компактного пространства, которое не является секвенциально компактным.
в)* Приведите пример секвенциально компактного пространства, которое не является компактным.

2.4 Докажите, что из числовой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.

2.5 а) Докажите, что ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^n$ имеет сходящуюся подпоследовательность.
б) Докажить, что подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая последовательность Коши в нем имеет предел.

2.6 Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным.

2.7 (Принцип вложенных шаров) Пусть задана последовательность вложенных замкнутых шаров $B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2) \supset \ldots \supset B(x_n, r_n) \supset \ldots$ в полном метрическом пространстве, радиус которых убывает $r_1 \geq r_2 \geq \ldots > 0$ и стремится к нулю $r_i \to 0$. Докажите, что их пересечение непусто и состоит из одной точки.

2.8 Покажите, что условие стремления к нулю в принципе вложенных шаров является необходимым: приведите пример, когда искомое пересечение пусто.

Пределы

2.9 (Экспонента) а) Докажите, что при всех $x \in \mathbb{R}$ существует предел

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Его значение $e = e^1$ при $x = 1$ иногда называют числом Эйлера.
б) Докажите, что $e^k = (e)^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ (справа стоит обычное возведение в степень). Выведите отсюда, что $e^x = (e)^x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2.10 Найдите следующие пределы:
а) $\lim_{n\to\infty}(n^a/b^n)$, при $a > 0, b > 1$;
б) $\lim_{n\to\infty}(n^a)/(\ln n)$, при $a > 0$;
в) $\lim_{n\to\infty}(a^n/n!)$, при $a > 1$;
г) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{7^n+8^n+9^n}{10^n+11^n}}$.

2.11 Существует ли предел $\lim_{n\to\infty} \cos n$?