Пополнение и топология на $\mathbb{R}^n$

3.1 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\mathbf{x} = (x_n)$, $\mathbf{y} = (y_n)$ — фундаментальные последовательности. Докажите, что существует предел

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Таким образом, имеется функция двух аргументов, определенная на множестве X' всех фундаментальных последовательностей в X.

3.2 В терминах предыдущей задачи покажите, что $\hat{\rho}$ симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника.

3.3 Докажите, что условие $\hat{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ задает отношение эквивалентности $\sim$ на X', причем $\hat{\rho}$ естественным образом продолжается на $\hat{X} = X'/\sim$.

Определение. Отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ метрических пространств называется *изометрией,* если для любых $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2))$.

3.4 Покажите, что $(\hat{X}, \hat{\rho})$ — полное метрическое пространство, в которое естественным образом изометрично вкладывается X. Что есть $\hat{\mathbb{Z}}$, $\hat{\mathbb{Q}}$, $\hat{\mathbb{R}}$?

Определение. Метрики ρ_1 и ρ_2 на пространстве X называются *сильно эквивалентными,* если найдутся такие константы $a, b > 0$, что для всех $x, y \in X$ выполнено неравенство $a\rho_2(x, y) \le \rho_1(x, y) \le b\rho_2(x, y)$.

3.5 Докажите, что сильно эквивалентные метрики задают одинаковую топологию.

3.6 Для всякого $p \ge 1$ рассмотрим метрику на $\mathbb{R}^n$, заданную формулой

$$\rho_p(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Докажите, что для любых $p_1, p_2 \ge 1$ метрики ρ_{p_1} и ρ_{p_2} сильно эквивалентны.

3.7 Докажите, что всякое открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}$ является не более чем счетным объединением попарно непересекающихся интервалов (открытые лучи и вся прямая также считаются интервалами).

Суммирование рядов

3.8 Найдите суммы следующих рядов: **а)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

3.9 Сходятся ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$?