

Ряды и последовательности

5.1 Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность, что $\forall n, m > 0$ выполнено $x_{n+m} \leq x_n + x_m$. Докажите, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf \left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$$

5.2 Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — такие положительные строго возрастающие последовательности вещественных чисел, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = A.$$

Покажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = A.$$

5.3 Исследуйте на сходимость ряд

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

5.4 Пусть $\{x_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ — такие последовательности, что

1. существует $M > 0$, такое что $\forall n > 0$ выполнено $|x_1 + \dots + x_n| < M$;
2. $\lim_n \varepsilon_n = 0$;
3. ряд $\sum_n |\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n|$ сходится.

Тогда ряд $\sum_n \varepsilon_n x_n$ сходится.

5.5 Пусть для последовательности $\{x_n\}$ выполнено

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{b}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

где b — некоторая константа, а $\lim_n \varepsilon_n = 0$. Проверьте следующее. **а)** Если $b < 1$, то ряд $\sum_n x_n$ расходится. **б)** Если $b > 1$, то ряд $\sum_n x_n$ сходится. **в)** Что будет при $b = 1$?

5.6 Пусть $\sum_n x_n$ — сходящийся ряд с положительными убывающими членами. Покажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 0$. Верно ли обратное?