

## Непрерывные отображения и функции

**6.1** Пусть  $f : X \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. Определите, какие из следующих утверждений верны:

- 1) прообраз замкнутого множества замкнут;
- 2) прообраз компактного множества компактен;
- 3) прообраз всюду плотного множества всюду плотен.

Пусть вдобавок  $f$  сюръективно:

- 4) образ открытого множества открыт;
- 5) образ замкнутого множества замкнут;
- 6) образ компактного множества компактен;
- 7) образ всюду плотного множества всюду плотен.

Что изменится, если пространство  $X$  компактно?

**6.2** Существует ли разрывная функция на плоскости, ограничение которой на любую прямую непрерывно?

**6.3** Существует ли разрывная в каждой точке функция на плоскости, такая что ограничение ее на любую горизонтальную и любую вертикальную прямую непрерывно?

**6.4** Существует ли непрерывная функция  $f$  на отрезке  $[0, 1]$ , такая что для всякого  $c \in [0, 1]$  множество уровня  $f^{-1}(c)$  имеет мощность континуум?

**6.5** Пусть дана последовательность непрерывных функций  $\{f_n\}$  на отрезке  $[0, 1]$ , такая что для любого  $x \in [0, 1]$  существует предел  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

- а) Докажите, что  $f$  непрерывна хотя бы в одной точке.
- б) Приведите пример, когда множество точек разрыва  $f$  совпадает с множеством рациональных чисел на отрезке.
- в) Может ли множество точек разрыва совпадать с множеством иррациональных чисел на  $[0, 1]$ ?

**6.6** Существует ли непрерывное и взаимно однозначное отображение  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?

**6.7** Существует ли непрерывная функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , такая что для всех  $x \in \mathbb{R}$  выполнено  $f(f(x)) = -x$ ?