N.B. Задачи, обозначенные ♣ и сданные до 4 ноября включительно, идут в бонус.

Дифференцирование

8.1 Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывная дифференцируемая кривая. Иначе говоря, $F(t) = (f(t), g(t))$, где $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывные на отрезке и дифференцируемые на (a,b). Докажите, что найдется $c \in (a,b)$, такая что

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Объясните, что это значит геометрически? Выполняется ли аналогичное утверждение для кривой в $\mathbb{R}^3$.

8.2 Многочлен F степени не больше 5 имеет общий корень с каждой из своих (непостоянных) производных F', F'', … **а)** Верно ли, что $F(x) = C(x-a)^n$? **б)** Тот же вопрос для многочленов степени больше 5.

Определение. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой (вогнутой)*, если для любых $c, d \in [a,b]$, $c < d$ график $f(x)$ на отрезке $[c,d]$ лежит не выше (не ниже) отрезка, соединяющего $(c, f(c))$ и $(d, f(d))$.

8.3 Пусть $f \in C^2([a,b])$ и $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in (a,b)$. Докажите, что f вогнута.

8.4 Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа.
а) Докажите, что $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. **б)** Докажите, что $\sqrt{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

8.5 а) Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{R}$.
б) Докажите, что на $\mathbb{R}$ существует бесконечно дифференцируемая функция, тождественно равная нулю на $(-\infty, 0]$ и единице на $[1, +\infty)$.

8.6♣ Докажите, что для производной дифференцируемой функции (которая не обязана быть непрерывной) выполняется теорема о промежуточном значении.

8.7♣ Существует ли дифференцируемая функция, производная которой разрывна в каждой точке?

8.8♣ Пусть f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и существует предел $\lim_{x\to a+0} f'(x)$. Покажите, что у f существует правая производная в точке a.

8.9♣ Найдите

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}.$$