

Н.В. Задачи, обозначенные ♣ и сданные до 11 ноября включительно, идут в бонус.

Дифференцирование

9.1 Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}.$$

9.2 Найдите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}.$$

9.3 Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов разложения

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

9.4♣ Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, причем на некотором отрезке у f имеется счетное число нулей. Докажите, что

$$\sup_{n \geq 0, x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| = \infty.$$

9.5♣ Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая монотонно возрастающая функция на всей прямой, а уравнение $f(x) = x$ имеет единственный корень a . Пусть $0 < f'(a) = c < 1$, а x_n — последовательность, заданная тем, что $x_1 \neq a$, $x_n = f(x_{n-1})$ при $n > 1$. Докажите, что существует ненулевой конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{c^n}.$$