

Н.В. Задачи, обозначенные ♣ и сданные до 18 ноября включительно, идут в бонус.

### Интегрирование & Со.

**10.1** Пусть  $f : [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  — монотонно убывающая непрерывная функция. Покажите, что ряд  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$  сходится тогда и только тогда, когда существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx$ .

**10.2** Выясните, при каких  $p, q \in \mathbb{R}$  сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}.$$

**10.3** Вычислите  $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$  при  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**10.4♣** Покажите, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right).$$

Данный предел называется *постоянной Эйлера*.

**10.5♣** Вычислите интеграл  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**10.6♣** Пусть  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Покажите, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$