

Н.В. Задачи, обозначенные ♣ и сданные до 18 ноября включительно, идут в бонус.

Интегрирование & Со.

10.1 Пусть $f : [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ — монотонно убывающая непрерывная функция. Покажите, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t f(x) dx$.

10.2 Выясните, при каких $p, q \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}.$$

10.3 Вычислите $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ при $p, q \in \mathbb{N}$.

10.4♣ Покажите, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right).$$

Данный предел называется *постоянной Эйлера*.

10.5♣ Вычислите интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

10.6♣ Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Покажите, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$