

Н.В. Задачи, обозначенные ♣ и сданные до 25 ноября включительно, идут в бонус.

Интегрирование наносит ответный удар

11.1 Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx.$$

11.2 Вычислите

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx.$$

11.3♣ а) Ненулевая непрерывная функция $f(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = \dots = \int_a^b x^n f(x) dx = 0.$$

Покажите, что f меняет знак на $[a, b]$ не менее n раз.

б) Ненулевая 2π -периодическая непрерывная функция $f(x)$ на \mathbb{R} удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = 0 \quad \text{при } k = 0, \dots, n.$$

Покажите, что на любом интервале длины $l > 2\pi$ функция f меняет знак не менее $2n + 2$ раз.

11.4♣ Докажите формулу С....на¹

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{(b-a)^5}{const} f^{(4)}(\zeta).$$

Здесь $f \in C^4([a, b])$, а ζ — некоторая точка, зависящая от a , b и f .

¹Знание названий именных теорем является частью общей культуры математика. Постарайтесь сами доказать эту формулу. Если хотите остаться культурными, спросите после успешной сдачи этой задачи у семинариста — он заполнит пропуски буквами.