Наибольший суммарный балл с учетом бонусов равен 100. Для получения положительной оценки надо набрать 60 баллов.

I.1 (10 баллов) Сформулировать и доказать утверждение о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда.

I.2 (10 баллов) Найти $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

I.3 (10 баллов) Найти $\lim_{x\to\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)$.

I.4 (10 баллов) Пусть $f(x)=\sin\left(x^{13}+x^{15}\right)$. Найти $f^{(43)}(0)$.

I.5 (10 баллов) При каких x сходится последовательность
$x_n=\left(\ldots\left(\left(x^2+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{2}{9}\right)^2+\ldots\right)^2+\frac{2}{9}$ (n квадратов) и чему равен этот предел?

I.6 (10 баллов) Пусть $0<a_n<1$. Доказать, что следующие 3 свойства равносильны:
a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$, b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\infty$, c) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)=0$.

I.7 (10 баллов) Может ли для разрывной (где-нибудь) интегрируемой (на любом отрезке) функции на вещественной прямой везде выполняться равенство

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x}f(t)dt=f(x)\,?$$

I.8 (10 баллов) Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на вещественной прямой такая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=1$. Верно ли, что функция $f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0? Если вторая производная $f''(x_0)$ существует, то чему она равна?

I.9 (20 баллов) Пусть $a_n>0$. Доказать, что для сходимости цепной дроби $a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots}}$ (т.е. для сходимости последовательности, n-ый член которой получается из цепной дроби обрубанием ее на элементе a_n) необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum a_n$ был расходящимся.

I.10 (20 баллов) Доказать, что всякое замкнутое подмножество вещественной прямой является множеством нулей некоторой бесконечно дифференцируемой функции.