НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Экзамен. 12.12.2011.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо *не позднее*, *чем 17:30 26 декабря, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач, то есть 5 задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть $f : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ сопоставляет каждой ортогональной матрице её первый столбец. Доказать, что f гладкое отображение, и что у него все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$. (5 баллов).

Задача 2. Пусть M — связное многообразие. Докажите, что для любых двух точек $x, y \in M$ существует автоморфизм M (то есть диффеоморфизм M на себя), переводящий x в y. (10 баллов).

Задача 3. Вычислить производную Ли 2-формы

$$y\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + (x^2 + y^2 + z^2) dz \wedge dx$$

вдоль векторного поля $(x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$. (5 баллов).

Задача 4. Вычислить

$$\int_M \omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz,$$

где $M \subset \mathbb{R}^3$ является параметризованной кривой $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\cos t\,\sin t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le 2\pi$. (5 баллов).

Задача 5*. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ гладкая функция на $M^n \times \mathbb{R}$, а λ_0 такое число, что

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0 \Longrightarrow d_x\varphi \neq 0.$$

Доказать, что $M_\lambda = \{x | \varphi(x, \lambda) \leqslant 0\}$ является многообразием с краем при λ достаточно близком к λ_0, и

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{M_\lambda} \omega = \int_{\partial M_\lambda} \tilde{\omega}.$$

Найти $\tilde{\omega}$. (25 баллов).

Задача 6. Найти когомологии двумерной сферы с μ вклеенными листами Мебиуса. (10 баллов).

Задача 7. Найти кольцо когомологий $\mathbb{CP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{CP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях). (10 баллов)

Задача 8. Доказать, что любая подгруппа Ли замкнута. (5 баллов)

Задача 9. Доказать, что любая орбита действия компактной группы Ли является замкнутым вложенным подмногообразием. (10 баллов).

Задача 10. Представить многообразие положительно определённых симметричных вещественных матриц порядка n как однородное пространство некоторой группы Ли. (5 баллов).