НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Повторный экзамен. 27.02.2012.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо *не позднее*, *чем 17:30 12 марта, отдать мне, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач, то есть 5 задач.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Пусть $f : V_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ естественное отображение многообразия Штифеля в многообразие Грассмана, которое сопоставляет линейно независимой системе k векторов порождённную ей k-плоскость. Доказать, что f гладкое отображение, и что у него все точки регулярны. (5 баллов).

Задача 2. Пусть $[z_0 : \ldots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{RP}^n$. *Отображение Веронезе* степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где z^I это некоторый моном степени d от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени d. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Доказать, что отображение Веронезе — гладкое отображение. Какова степень отображения Веронезе степени d? Описать образ отображения Веронезе. *(5 баллов).*

Задача 3. Рассмотрим $U(n)$ как заданное естественным вложением подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. Найти пересечение $U(n) \cap \mathfrak{u}(n)$ как подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. (10 баллов).

Задача 4. Вычислить $\int\limits_M \omega$, где $\omega = \frac{dy\wedge dz}{x} + \frac{dz\wedge dx}{y} + \frac{dx\wedge dy}{z}$ а $M \subset \mathbb{R}^3$ эллипсоид, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (5 баллов).

Задача 5*. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ гладкая функция на $M^n \times \mathbb{R}$, а λ_0 такое число, что $\varphi(x, \lambda_0) = 0 \Longrightarrow d_x\varphi \neq 0$. Доказать, что $M_\lambda = \{x | \varphi(x, \lambda) \leqslant 0\}$ является многообразием с краем при λ достаточно близком к λ_0, и

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{M_\lambda} \omega = \int_{\partial M_\lambda} \tilde{\omega}.$$

Найти $\tilde{\omega}$. (25 баллов).

Задача 6. Найти когомологии двумерной сферы с μ вклеенными листами Мебиуса и с g вклеенными ручками. (10 баллов).

Задача 7. Найти кольцо когомологий $\mathbb{RP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{RP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях). (10 баллов)

Задача 8. Найти все дискретные подгруппы в группе аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}^1$. (5 баллов)

Задача 9. Доказать, что коммутативная связная группа Ли локально изоморфна векторному пространству. (10 баллов).

Задача 10. Пусть G компактная связная группа Ли. Доказать, что каждая точка $x \in G$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе. (5 баллов).