НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 1.
Теорема о неявной функции, k-поверхности в $\mathbb{R}^n$. 12.09.2011.

Задача 1. Пусть кривая задана неявным уравнением $F(x, y) = 0$. Доказать, что если (x_0, y_0) — точка перегиба, то

$$\left(F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right)(x_0, y_0) = 0.$$

Задача 2. Сколько точек перегиба может быть у кубики (то есть в случае, когда $F(x, y)$ — полином степени 3 от x, y)?

Задача 3. Физики говорят, что «если $f(x, y, z) = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1$». Придайте смысл этому высказыванию.

Задача 4. Пусть F не имеет критических точек, и $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ задаёт компактную поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что при малых t уравнения $F(x^1, \ldots, x^n) = t$ задают неособые компактные поверхности S_t, лежащие в $\delta(t)$-окрестности S, причём $\delta(t) = O(t)$ при $t \to 0$.

Задача 5. Используя предыдущую задачу, доказать, что набор из локальных координат на S и t можно использовать (как?) в качестве локальных координат в окрестности S в $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. Пусть S гладкая k-мерная поверхность, и $d_p : S \longrightarrow \mathbb{R}$ функция, заданная формулой $d_p(x) = ||p - x||^2$, где p — фиксированная точка. Доказать, что в точках экстремума функции d_p вектор $p - x$ ортогонален S.

Задача 7. Доказать, что для любой прямой, перпендикулярной S в точке $q \in S$, существует не более k точек p таких, что $d_p(x)$ имеет q своей вырожденной критической точкой.

Задача 8. Доказать, что $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ — неособая гиперповерхность в пространстве $n \times n$-матриц.

Задача 9. Доказать, что $\mathrm{SO}(n)$ — неособая поверхность в пространстве $n \times n$-матриц.

Задача 10. Задать тор вращения как гиперповерхность $f(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}^3$.