

НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 11.
Действия групп Ли, однородные пространства. 5.12.2011.

В задачах 1–3 данного листка G группа Ли, $H \subset G$ её подгруппа Ли, G/H множество левых смежных классов, а $p : G \rightarrow G/H$ естественное отображение $g \mapsto [gH]$.

Задача 1. Введём на множестве левых смежных классов G/H фактортопологию. Доказать, что G/H с фактортопологией является хаусдорфовым топологическим пространством.

Задача 2. Доказать, что $d_{ep} : \mathfrak{g} \rightarrow T_{p(e)}G/H$ является сюръективным.

Задача 3. Доказать, что $\text{Ker } d_{ep} = \mathfrak{h}$.

Задача 4. Пусть группа Ли G действует на гладком многообразии M , а N — ядро неэффективности этого действия, то есть $N = \{g \in G \mid \forall x \in M \quad gx = x\}$. Доказать, что N является нормальной подгруппой Ли группы G .

Задача 5. Пусть G действует на гладком многообразии M , а N — ядро неэффективности этого действия. Доказать, что для любой нормальной подгруппы Ли $H \subset N$ индуцированное действие G/H на M является действием группы Ли.

Задача 6. Пусть $H \subset G$ подгруппа Ли группы Ли G , а $N \subset H$ нормальная подгруппа Ли группы Ли H . Доказать, что H/N является подгруппой Ли группы Ли G/N .

Задача 7. Пусть $f : G \rightarrow H$ эпиморфизм групп Ли. Доказать, что индуцированное отображение $\tilde{f} : G/\text{Ker } f \rightarrow H$, определённое как $g \text{Ker } f \mapsto f(g)$, является изоморфизмом групп Ли.

Задача 8. Рассмотрим группу Ли G с действием группы Ли $G \times G$

$$\alpha((g_1, g_2), x) = g_1 x g_2^{-1}.$$

Доказать, что это действие транзитивно, найти стабилизатор $e \in G$, и доказать, что группа изотропии изоморфна $\text{Ad } G \subset \text{GL}(\mathfrak{g})$.

Задача 9. Представить многообразие Штифеля $V(k, \mathbb{R}^n)$ как однородное пространство. Использовать это представление для подсчёта размерности многообразия Штифеля.

Задача 10. Когда на однородном пространстве G/H существует G -инвариантное векторное поле? Привести примеры однородных пространств, на которых такое поле существует, и примеры однородных пространств, на которых такое поле не существует.