**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.**
**Касательные векторы, векторные поля. 3.10.2011.**

**Задача 1.** Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Найти базис в касательном пространстве $T_P\mathbb{S}^1$ в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^2$.

**Задача 2.** Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

**Задача 3.** Пусть $v$ такой касательный вектор в точке $P$ из предыдущей задачи, что его координаты, соотвествующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соотвествующие стереографической проекции из южного полюса.

**Задача 4.** Рассмотрим точку $P$ и вектор $v$ из предыдущих двух задач. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найти $\partial_v f$.

**Задача 5.** Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в данном базисе.

**Задача 6.** Чему диффеоморфно касательное расслоение к окружности $T\mathbb{S}^1$?

**Задача 7.** Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность $U$ точки $p$, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

**Задача 8.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1, \ldots, f_k$ такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1, \ldots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

**Задача 9.** Пусть $M$ многообразие размерности $k$, а $f_1, \ldots, f_l$, $l < k$, такие функции на $M$, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $p$ функции $f_1, \ldots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

**Задача 10.** Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ сюрьективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1, \ldots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f, \ldots, x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки $p$.