НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.
Касательные векторы, векторные поля. 3.10.2011.

Задача 1. Рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1$, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 = 1,$$

и точку $P = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Найти базис в касательном пространстве $T_P\mathbb{S}^1$ в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Описать в терминах объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$ касательное пространство $T_P\mathbb{S}^2$ к сфере $\mathbb{S}^2$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

в точке $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Задача 3. Пусть v такой касательный вектор в точке P из предыдущей задачи, что его координаты, соотвествующие стереографической проекции из северного полюса равны $(1, 1)$. Найти координаты этого вектора, соотвествующие стереографической проекции из южного полюса.

Задача 4. Рассмотрим точку P и вектор v из предыдущих двух задач. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничение функции $x + y + z$ на сферу. Найти $\partial_v f$.

Задача 5. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Записать векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial r}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ и найти их коммутатор посредством вычисления по явной формуле в данном базисе.

Задача 6. Чему диффеоморфно касательное расслоение к окружности $T\mathbb{S}^1$?

Задача 7. Доказать следующую теорему об обратной функции для многообразий. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ является изоморфизмом. Тогда существует такая окрестность U точки p, что отображение $\psi : U \longrightarrow \psi(U)$ является диффеоморфизмом на открытое множество $\psi(U)$.

Задача 8. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \dots, f_k$ такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_k$ можно взять в качестве локальных координат.

Задача 9. Пусть M многообразие размерности k, а $f_1, \dots, f_l$, $l < k$, такие функции на M, что их дифференциалы линейно независимы в некоторой точке $p \in M$. Доказать, что в некоторой окрестности точки p функции $f_1, \dots, f_l$ можно дополнить до системы локальных координат.

Задача 10. Пусть $f : M \longrightarrow N$ гладкое отображение многообразий, такое, что в точке $p \in M$ отображение $d_p f : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ сюръективно. Доказать, что если в окрестности $f(p) \in N$ функции $x^1, \dots, x^l$ образуют локальную систему координат, то функции $x^1 \circ f, \dots, x^l \circ f$ можно дополнить до системы локальных координат в некоторой окрестности точки p.