НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 4.
Подмногообразия. 10.10.2011.

Задача 1. Пусть M — гладкое многообразие и A — подмножество в M. Фиксируем топологию на A. Тогда на A существует не более одной структуры гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие в M, где i — отображение вложения.

Задача 2. Пусть снова A — подмножество в M. Если в индуцированной топологии A обладает структурой гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие M, то на A существует единственная структура многообразия, то есть единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счётности и единственная дифференцируемая структура, такая, что (A, i) — подмногообразие в M.

Задача 3. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ определено формулой

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1.$$

Для каких из точек $p = (0, 0)$, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $p = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ множество $f^{-1}(f(p))$ будет вложенным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

Задача 4. Пусть $N \subset M$ подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$, такую, что $\gamma((a, b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}N$ для каждого $t \in (a, b)$.

Задача 5. Рассмотрим $\mathbb{S}^1$ как единичную окружность в комплексной плоскости и тор $\mathbb{T}$ как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что $(\mathbb{R}, \varphi)$ — плотное подмногообразие в $\mathbb{T}$ (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразие вложенное?

Задача 6. Является ли $\mathrm{SL}(n)$ подмногообразием $\mathrm{GL}(n)$? Вложенным подмногооразием? Погружённым подмногообразием?

Задача 7. Тот же вопрос для $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SL}(n)$.

Задача 8. Построить пример такой поверхности Σ в $\mathbb{R}^n$, что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразием.

Задача 9. Доказать, что замкнутая верхняя полусфера

$$\mathbb{S}^2_{\geqslant 0} = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$$

является многообразием с краем.

Задача 10. Является ли открытый диск $\mathrm{Int} D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ многообразием с краем?