НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 5.
Векторные поля и распределения; разное. 17.10.2011.

Задача 1. Докажите, что если $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты на многообразии M, то $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$.

Задача 2. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, X_M, Y_M векторные поля на M, а X_N, Y_N соответственно φ-связанные с ними векторные поля на N. Доказать, что тогда $[X_M, Y_M]$ и $[X_N, Y_N]$ тоже φ-связаны.

Задача 3. Пусть $\varphi : M \longrightarrow N$ гладкое отображение, а X гладкое векторное поле на M, причём $d_x\varphi(X_x) = d_y\varphi(X_y)$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обязательно ли существует гладкое векторное поле на N, φ-связанное с X?

Задача 4. Пусть $K \subset M$ — компактное подмножество в многообразии M. Докажите, что любая интегральная кривая либо продолжается на всю ось времени, либо выходит за пределы K.

Задача 5. Докажите, что любое гладкое векторное поле на компактном многообразии является полным.

Задача 6. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = ydx$. Нарисуйте это поле плоскостей. Докажите, что у него нет интегральной поверхности.

Задача 7. В пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $x^1, \dots, x^n$, $y^1, \dots, y^n$, z рассмотрим поле гиперплоскостей (называемое распределением Картана), заданное уравнением

$$dz = \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i.$$

Какова максимальная размерность интегрального подмногообразия?

Задача 8. Докажите, что произведение сфер $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ вкладывается в $\mathbb{R}^{n+m+1}$.

Задача 9. Докажите, что любое связное многообразие линейно связно.

Задача 10. Дайте определение дифференциала отображения многообразий для каждого определения касательного вектора и докажите их эквивалентность.