НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 6.
Дифференциальные формы, тензорные поля. 24.10.2011.

Задача 1. Тензор $(e_1 + e_2) \otimes (2e^1 - e^3)$ задает оператор A. Какой тензор задает оператор A^2?

Задача 2. Докажите, что векторное поле X является гладким тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-формы ω функция $\omega(X)$ является гладкой.

Задача 3. Пусть $A\colon Vect(M) \to C^\infty(M)$ — линейное отображение. Доказать, что для существования 1-формы ω, такой, что для любого векторного поля X верно тождество $A(X)(x) = \omega(X_x)$, необходима и достаточна $C^\infty(M)$-линейность A, то есть выполнение тождества $A(fX) = fA(X)$ для любой гладкой фнкции f.

Задача 4. Пусть Ω дифференциальная p-форма, ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 5. Найти

- $d\omega$, если $\omega = x^2 dx \wedge dy + xzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$,
- $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Задача 6. Докажите, не используя явной формулы для производной Ли в координатах, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и векторного поля $X \in Vect(M)$ верно тождество $L_X f = Xf$.

Задача 7. Докажите, не используя явной формулы для производной Ли в координатах, что для любых двух векторных полей $X, Y \in Vect(M)$ верно тождество $L_X Y = [X, Y]$.

Задача 8. Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$ и $Y, X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля на M. Доказать тождество

$$(L_Y \omega)(X_1, \ldots, X_p) = L_Y(\omega(X_1, \ldots, X_p)) -$$

$$-\omega(L_Y X_1, \ldots, X_p) - \ldots - \omega(X_1, \ldots, L_Y X_p).$$

Задача 9. Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$ и $X_0, \ldots, X_p$ — векторные поля на M. Доказать тождество

$$(d\omega)(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p)) +$$

$$+ \sum_{i<j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p).$$

Задача 10*. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — векторные поля на открытом подмножестве U многообразия M размерности m, линейно независимые в каждые точке. Докажите, что если попарные коммутаторы векторных полей X_i равны нулю, то в некоторой окрестности каждой точки $p \in U$ найдется такая локальная система координат $x^1, \ldots, x^m$, что $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.