НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 7.
Дифференциальные формы и тензоры-II, интегрирование. 7.11.2011.

Задача 1. Докажите, что форма объема на единичной сфере $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задается формулой

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1},$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 2. Обозначим через $\mathbb{R}^{1,2}$ пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами (t, x, y) и псевдоримановой метрикой $g = dt^2 - dx^2 - dy^2$. Введите аналог сферических координат на псевдосфере $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ и вычислите ограничение на псевдосферу g в этих координатах. Убедитесь, что $-g$ является римановой метрикой.

Задача 3. Рассмотрим стереографическую проекцию верхней чашки псевдосферы из точки $(0, 0, -1)$ на единичный диск в плоскости $t = 0$. Будем рассматривать координаты (x, y) на диске как координаты на псевдосфере. Вычислите риманову метрику на псевдосфере в этих координатах.

Задача 4. Отобразим верхнюю полуплоскость $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ на единичный круг с помощью отображения $\varphi(z) = i\frac{z-i}{z+i}$. Убедитесь, что φ — диффеоморфизм и вычислите метрику $\varphi^*(g)$ на $\mathcal{H}$, где g — метрика из предыдущей задачи.

Задача 5. Докажите, что $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$ и $[L_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$.

Задача 6. Вычислить интеграл от формы

$$\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$.

Задача 7. Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

где L отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$.

Задача 8. Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 9. Вычислить

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

для любого контура L. Как ответ соотносится с теоремой Стокса?

Задача 10. Вычислить непосредственно и с помощью теоремы Стокса интеграл

$$\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

где L эллипс в $\mathbb{R}^3$, заданный уравнениями

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 1.$$